



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»  
(ДГТУ)**

Кафедра «Инженерная и компьютерная графика»

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

г. Ростов-на-Дону  
2020 г.

Составители: кандидат технических наук, доцент М.В. Савенков  
кандидат технических наук, доцент Е.И. Фисунова  
старший преподаватель О.А. Пятницкая  
старший преподаватель Т.В. Лавренова

**УДК 514(015)**  
**С 60**

Начертательная геометрия: учеб. Пособие. /ФГБОУ ВПО ДГТУ, Ростов н/Д, 2020,-  
60с.

Учебное пособие содержит описание геометрических объектов и методов изучения их геометрических свойств с использованием графических построений, решений метрических и позиционных задач. В соответствии с существующей программой для технических ВУЗов, теоретический материал учебного пособия следует рассматривать как дополнение к читаемым лекциям и рекомендуется при самостоятельной подготовке к практическим и лабораторным занятиям по изучаемому курсу.

Печатается по разрешению редакционно-издательского совета  
Донского государственного технического университета

Научный редактор: д-р техн. наук, профессор Г.А. Кузин

Рецензент: профессор Д.Н. Бородин

Издательский центр ДГТУ©, 2020

## Введение

Целью учебного пособия является оказание помощи обучающимся всех специальностей ДГТУ дневного и заочного отделений при изучении Курса «Начертательная геометрия».

Курс «Начертательная геометрия» достаточно полно изложен в учебниках Четверухина Н.Ф., Левицкого В.С., Гордон В.О., Пшеничного Н.Н., Иерусалимского А.М., Посвянского А.Д., Фролова С.А. и других. Эти труды являются основой курса лекций, читаемых по начертательной геометрии не только в ДГТУ, но и в других вузах.

Данное пособие разработано на основе учебных планов, рабочих программ, реализацию которых осуществляют преподаватели кафедры «Инженерная и компьютерная графика» ДГТУ. При разработке пособия ставилась задача – в краткой конспективной форме представить курс лекций таким, как он излагается в учебном процессе. При этом, используя данное пособие, обучающиеся получают возможность изучить целый ряд разделов курса подробно и в большем объеме самостоятельно.

Поставленной цели в значительной степени способствовали методические разработки, выполненные в разное время Шербаковым К.Ф., Соломиным А.Н., Бобриковым А.Г., Бондаренко Г.И., Бочковым Н.П., Шириным В.Ф. и другими доцентами кафедры «Начертательная геометрия и инженерная графика», и обобщающие опыт более чем 80-летнего преподавания курса «Начертательная геометрия» в РИСХМ - ДГТУ.

## Понятие о проецировании

Начертательная геометрия – это теория изображения пространственных тел на плоскости или поверхности и решения пространственных задач с помощью этих изображений.

Предметом начертательной геометрии является:

1. Изложение способов построения изображений пространственных объектов на плоскости (или поверхности);
2. Обоснование способов решения пространственных задач с помощью изображений;
3. Использование способов начертательной геометрии для решения практических задач науки и техники.

Основным средством начертательной геометрии является изображение или чертёж (эпюр – франц.), к которому предъявляются определённые требования. Чертёж должен быть наглядным, обратимым, простым и достаточно точным.

## Некоторые принятые обозначения:

Плоскости проекций:  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  и т.д.

Точки: в пространстве:  $A, B, C, D$  и т.д.  
в проекциях:  $A_1, B_1, C_1, D_1 \dots$   
 $A_2, B_2, C_2, D_2 \dots$   
 $A_3, B_3, C_3, D_3 \dots$

Линии: в пространстве:  $a, b, c, d, e$  и т.д.  
в проекциях:  $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 \dots$   
 $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 \dots$   
 $a_3, b_3, c_3, d_3, e_3 \dots$

Плоскости: в пространстве:  $\alpha, \beta, \gamma \dots$   
следами плоскости:  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots$

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \dots$

$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \dots$

Условные обозначения: Параллельность -  $\parallel$   
Перпендикулярность -  $\perp$   
Пересечение -  $\cap$   
Равенство -  $=$   
Совпадение -  $\equiv$   
Принадлежность -  $\in$   
Прямой угол -  $\angle$   
Точка -  $(\bullet)$

Основоположником начертательной геометрии является французский инженер и ученый Гаспар Монж (1748-1818), которому принадлежит крылатое выражение: «Чертеж - язык техники». Профессор В.К. Курдюмов (1853-1904), автор русского - классического учебника по начертательной геометрии писал: «Если чертеж является языком техники, то начертательная геометрия служит грамматикой этого языка...»

Изучение начертательной геометрии способствует развитию у обучающихся пространственного мышления, без которого невозможно успешное выполнение различных инженерно-графических и проектно-конструкторских работ.

### Понятие о проецировании

Проецирование - это способ построения изображения или проекции пространственного объекта. Проекцией геометрического объекта называется правильно построенное изображение его на плоскости или поверхности вне объекта, выполненное по определенным законам.

В зависимости от способа построения проекции различают центральные и параллельные.

### Центральные проекции

Представим в пространстве плоскость и точку  $S$  не лежащую в этой плоскости (смотри рисунок 1). Возьмем в пространстве точку  $A$  и проведем из точки  $S$  через  $A$  проецирующий луч до пересечения с плоскостью, в результате чего на плоскости получим проекцию точки  $A_1$ .

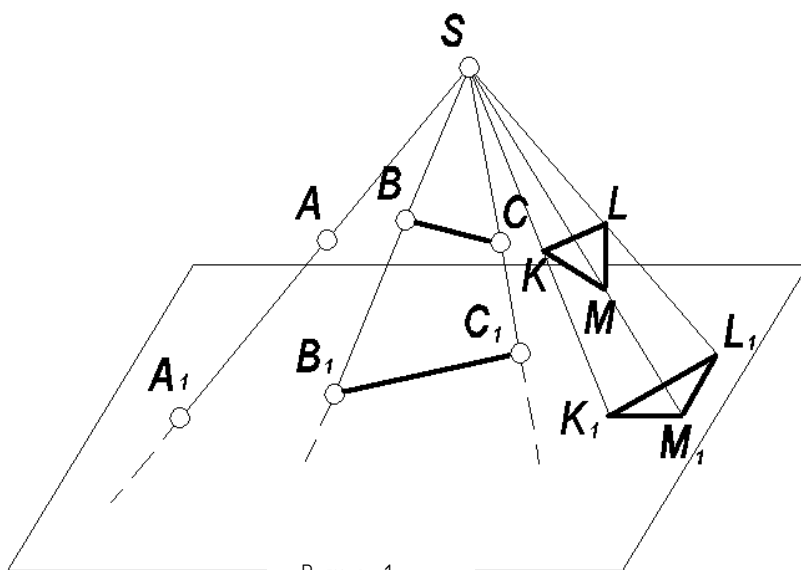


Рисунок 1

В результате чего получили название:

$P_1$ - плоскость проекций;

$S$  - центр проекций;

$A$  - точка в пространстве;

$SA$  - проецирующий луч;

$A_1$  - центральная проекция точки  $A$  на плоскость  $P_1$ .

Для построения центральной проекции линии  $(BC)$  достаточно построить проекции двух ее точек  $B$  и  $C$ . От центральной проекции точки  $A$ , линии  $(BC)$  можно перейти к построению центральной проекции фигуры  $(\triangle KLM)$  и пространственного объекта, рассматривая их как совокупность точек в пространстве.

Центральные проекции получили широкое распространение в архитектурно-строительном и художественном деле.

### Параллельные проекции

Параллельные проекции получаются, если центр проецирования  $S$  удален в бесконечность от плоскости проекций ( $\Pi_1$ ). Тогда, проецирующие лучи становятся параллельными некоторому направлению проецирования  $S$  прямыми (смотри рисунок 2). Параллельной проекцией точки  $A$  называется точка  $A_1$ , пересечения проецирующего луча  $AA_1$ , проведенного параллельно заданному направлению  $S$  с плоскостью проекций  $\Pi_1$ . Параллельные проекции линий, фигур и объектов строят, рассматривая их как совокупность отдельных точек (пример линии  $a$ , фигуры ( $\triangle BCD$ ) смотри на рисунке 2).

В зависимости от направления проецирования  $S$  параллельные проекции делятся на прямоугольные, если проецирующий луч перпендикулярен плоскости проекций ( $S \perp \Pi_1$ ), и косоугольные, когда направление проецирования составляет с плоскостью проекций угол, отличный от прямого ( $S \neq \Pi_1$ ). Прямоугольные параллельные проекции, называемые так же ортогональными, нашли широкое применение в технике.

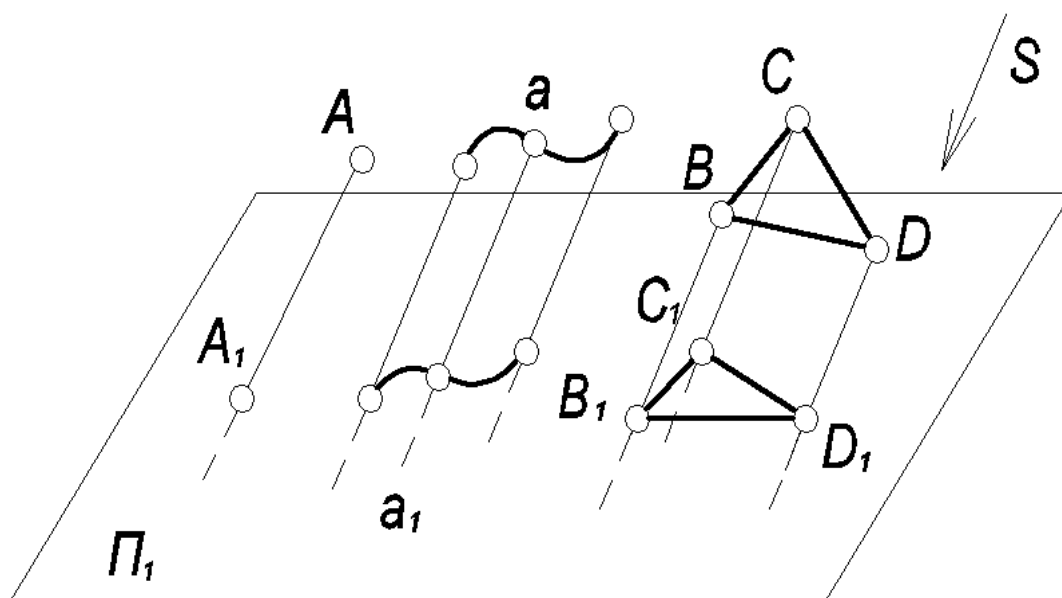


Рисунок 2

### Основные свойства параллельного проецирования

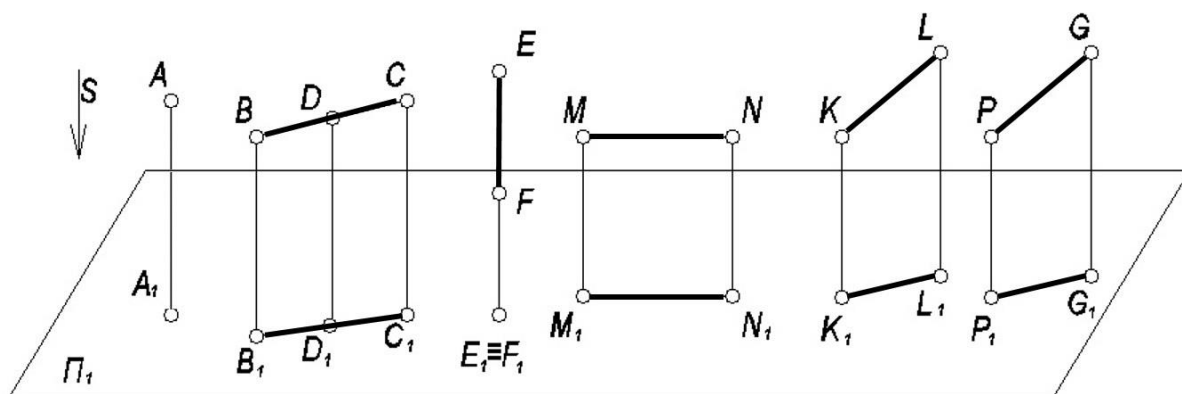


Рисунок 3

К основным свойствам параллельного проецирования относятся (смотри рисунок 3):

1. Точка  $A$  проецируется на плоскость проекций в точку  $A_1$ .
2. Прямая линия  $BC$  в общем случае проецируется в прямую  $B_1C_1$ , в частном случае - в точку, если она параллельна направлению проецирования ( $EF \parallel S$ ) или в натуральную величину, если она параллельна плоскости проекций ( $MN \parallel \Pi_1$ ).
3. Если точка  $D$  принадлежит прямой  $BC$ , то проекция точки  $D_1$  принадлежит проекции прямой  $B_1C_1$ .

4. Отношение отрезков прямой равно отношению их проекций:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{B_1D_1}{D_1C_1}$$

5. Проекция двух параллельных прямых ( $KL \parallel PQ$ ) параллельны между собой ( $K_1L_1 \parallel P_1Q_1$ ).

6. Отношение отрезков двух параллельных прямых, равно отношению проекций этих прямых:

$$\frac{KL}{PQ} = \frac{K_1L_1}{P_1Q_1}$$

### Проекция точки

Проекция точки (объекта) на одну плоскость не определяет ее (его) положение в пространстве, поэтому на практике пользуются ортогональными проекциями точки (объекта) на две или три взаимно-перпендикулярные плоскости проекций.

### Двухкартинный чертеж точки (Проекция Монжа)

Две взаимно - перпендикулярные плоскости:  $\Pi_1$  - горизонтальная и  $\Pi_2$  - фронтальная, пересекаются по оси  $X_{12}$  и делят все пространство на 4 части или квадранта: I, II, III, IV (рисунок 4).

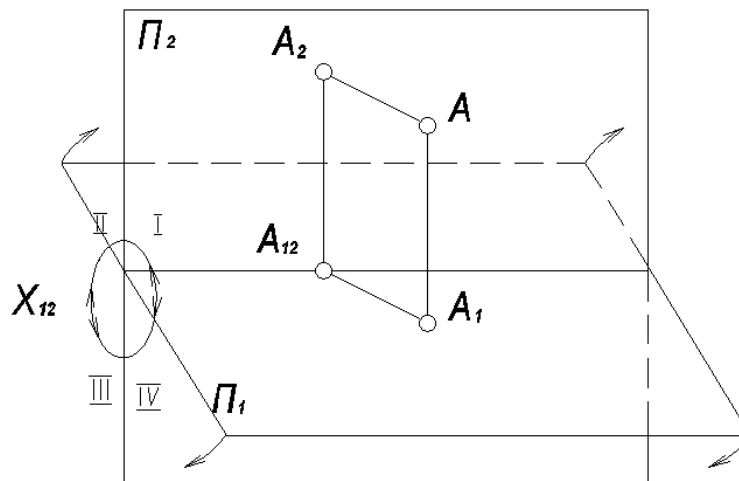


Рисунок 4

Для получения 2-х картинного чертежа точки  $A$  необходимо из этой точки опустить перпендикуляры на плоскости проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  получить, соответственно, горизонтальную –  $A_1$  и фронтальную -  $A_2$  проекции точки  $A$ .

Затем плоскость  $\Pi_1$  вместе с расположенной в ней проекцией  $A_1$  следует повернуть за переднюю полу вниз до совмещения с плоскостью  $\Pi_2$ , которая принимается за плоскость чертежа. При этом проекции точки  $A_1$  и  $A_2$  располагаются на вертикальной линии связи, перпендикулярной оси  $OX$  ( $A_1A_{12}A_2 \perp X_{12}$ ).

Положение точки в пространстве определяется расстоянием соответственно от плоскостей проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ , которые в проекциях измеряются по осям  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и

называются координатами. Если точка задается координатами, то при построении проекций следует помнить, что положительная координата  $X$  откладывается влево от начала координат  $O$ , а отрицательная – вправо; положительная координата  $Y$  откладывается вниз от точки  $A_{12}$ , отрицательная – вверх; положительная координата  $Z$  откладывается вверх от точки  $A_{12}$ , отрицательная – вниз.

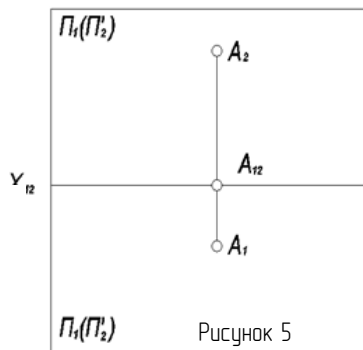


Рисунок 5

Полученная картина (смотри рисунок 5) и будет 2-х картинным чертежом точки  $A$ , заданной в 1-ом квадранте. Координаты точки  $A$ :

$AA_2 = A_1A_{12} = Y_A$  - расстояние до плоскости  $\Pi_2$

$AA_1 = A_2A_{12} = Z_A$  - расстояние до плоскости  $\Pi_1$

Аналогично строятся 2-х картинные чертежи точек, заданных в любой части пространства как показано на рисунке 6. Соответственно:

$A$  находится в I квадранте;

$B$  находится в II квадранте;

$C$  находится в III квадранте;

$D$  находится в IV квадранте;

$E$  принадлежит плоскости  $\Pi_2$ .

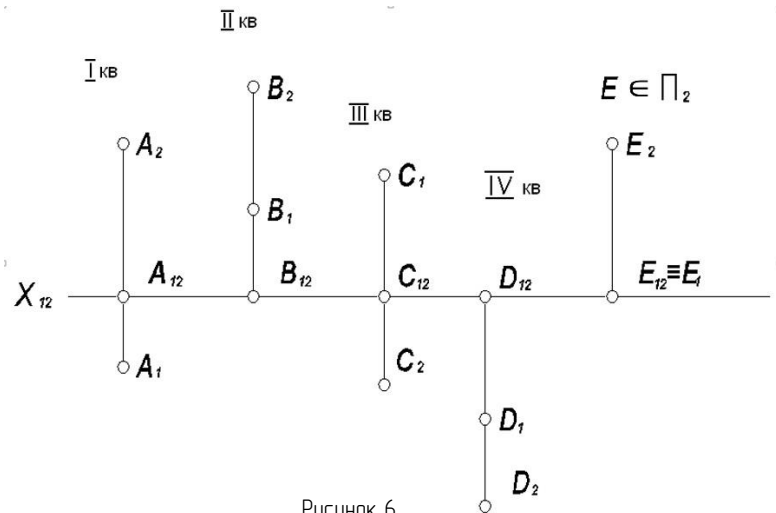


Рисунок 6

### Трехкартинный чертеж точки

Три взаимно - перпендикулярных плоскости проекций:  $\Pi_1$ -горизонтальная,  $\Pi_2$  - фронтальная и  $\Pi_3$  - профильная, пересекаются по осям  $X_{12}$ ,  $Y_{13}$ ,  $Z_{23}$  и делят все пространство на 8 частей или октантов (смотри рисунок 7).

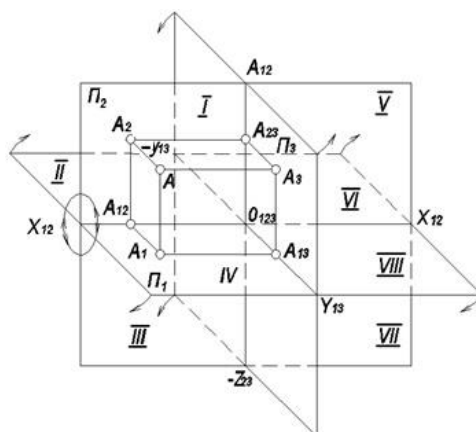


Рисунок 7

Для получения 3-х картинного чертежа точки  $A$  необходимо из этой точки опустить перпендикуляры на плоскости проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  и получить, соответственно, проекции

$A_1, A_2, A_3$ . Затем плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  вместе с расположенными в них проекциями совместить с плоскостью чертежа  $\Pi_2$  как указано на рисунке 7 и получить 3-х картинный комплексный чертеж точки  $A$  (рисунок 8). Наибольшее распространение получили проекции объектов (точек, линий и др.), расположенных в 1-ом октанте.

Координаты:

$$AA_3 = O_{123}A_{12} = A_2A_{23} = X_A,$$

$$AA_2 = A_1A_{12} = A_3A_{23} = Y_A,$$

$$AA_1 = A_2A_{12} = Z_A$$

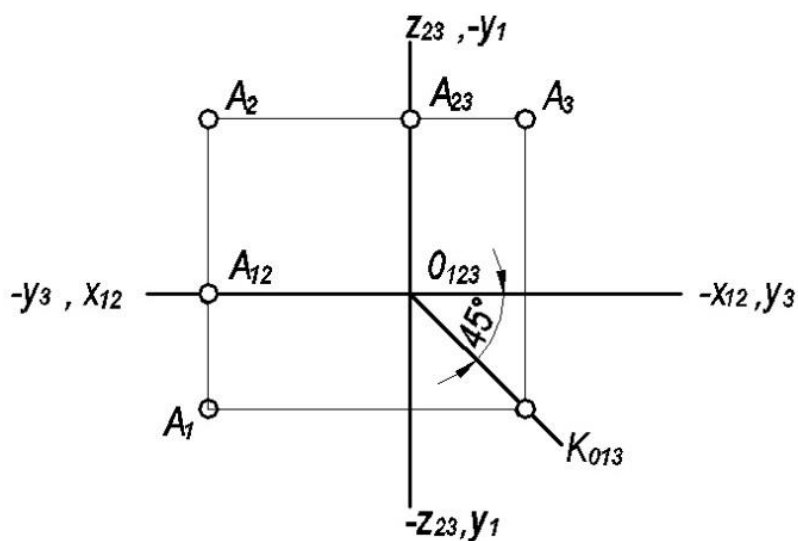


Рисунок 8

Таблица знаков координат точек.

Октант	Координаты		
	X	Y	Z
I		+	+
II		+	-
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	+	-
VII	-	-	+
VIII	-	-	-

При построении 3-х картинного чертежа точки  $A$ , заданной в любом октанте следует помнить, что:

- 1) Проекция  $A_1$  и  $A_2$  - лежат на вертикальной линии связи;
- 2) Проекция  $A_2$  и  $A_3$  - лежат на горизонтальной линии связи;
- 3) Проекция  $A_1$  и  $A_3$  - лежат на горизонтально-вертикальной линии связи, проходящей через постоянную прямую чертежа  $K_{013}$

Пример: Построить 3<sup>x</sup> - картинный чертеж точки  $A$   $(-20, -30, 40)$ , заданной в V октанте (рисунок 9).

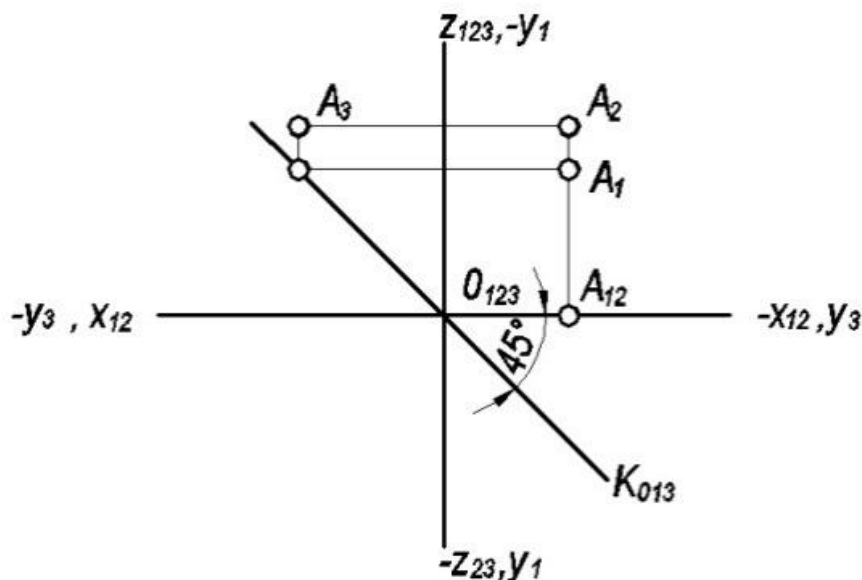


Рисунок 9



## Проекции прямой линии

### Определение натуральной величины отрезка прямой линии

Прямая линия в пространстве определяется положением двух любых ее точек, поэтому для получения чертежа прямой линии необходимо построить проекции 2<sup>х</sup> ее точек.

В зависимости от расположения прямой по отношению к плоскостям проекций, различают прямые общего и частного положений.

### Прямая общего положения

Прямой общего положения называют прямую, пересекающую при своем продолжении все три плоскости проекций.

Для получения проекций прямой общего положения необходимо построить проекции 2<sup>х</sup> ее точек (рисунок 10). Проекции отрезка прямой общего положения всегда меньше величины самого отрезка и располагаются по отношению к осям проекций под различными косыми углами.

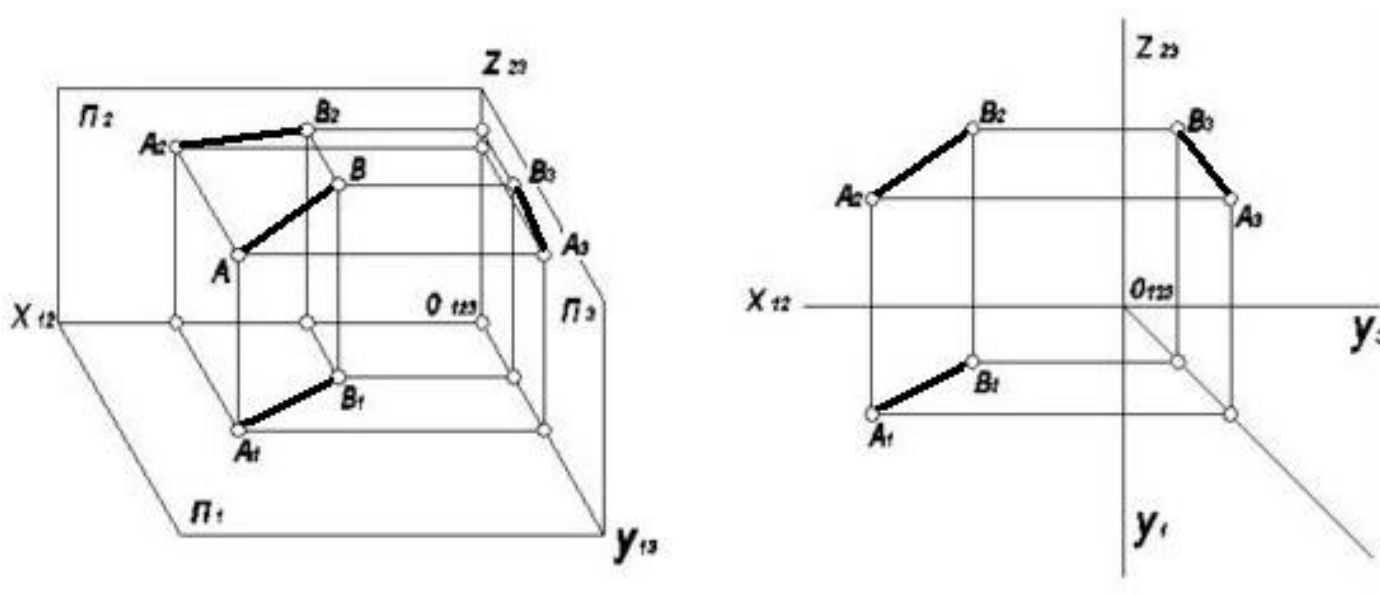


Рисунок 10

### Прямые частного положения

Прямой частного положения называют прямую, параллельную или перпендикулярную к одной из плоскостей проекций.

### Прямые уровня

Прямая  $h$  параллельна плоскости  $\Pi_1$  показана на рисунке 11. Фронтальная проекция прямой  $h_2$  параллельна оси проекций, и горизонтальная проекция отрезка этой прямой  $h_1$  равна самому отрезку:  $A_1B_1=AB$ . Такая прямая называется *горизонтальной* (коротко - *горизонталь*).

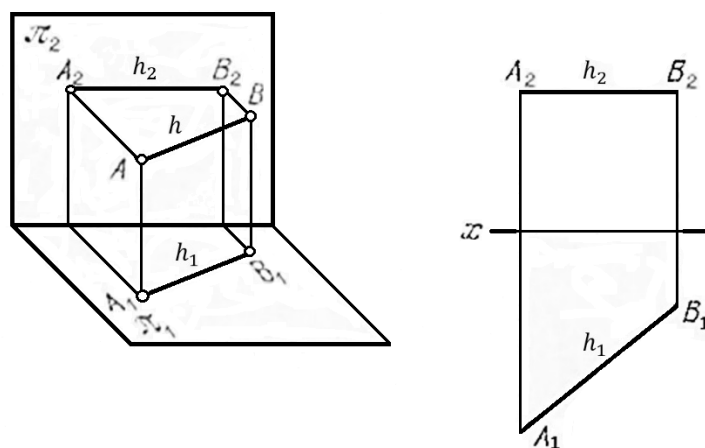


Рисунок 11

Прямая  $f$  параллельна плоскости  $\Pi_2$  изображена на рисунке 12. Горизонтальная проекция  $f_1$  параллельна оси проекций и фронтальная проекция отрезка этой прямой  $f_2$  равна самому отрезку:  $C_2D_2 = CD$ . Такая прямая называется *фронтальной* (коротко *фронталь*).

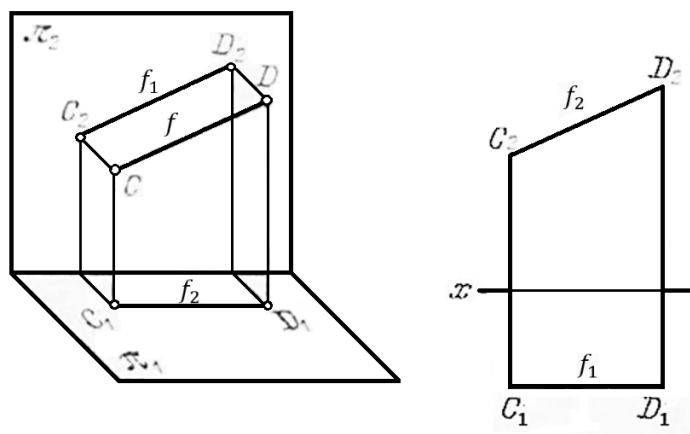


Рисунок 12

Прямая  $p$  параллельна плоскости  $\Pi_3$  изображена на рисунке 13. Горизонтальная ( $p_1$ ) и фронтальная ( $p_2$ ) проекции прямой располагаются на одном перпендикуляре к оси проекций  $Ox$  и профильная проекция этой прямой ( $p_3$ ) равна самому отрезку:  $E_2F_2 = EF$ . Такая прямая называется *профильной*.

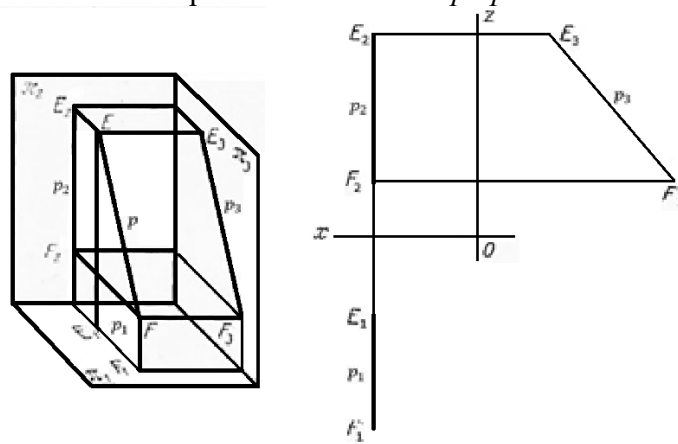


Рисунок 13

## Проецирующие прямые

Прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций называются проецирующими прямыми (смотри рисунок 14).

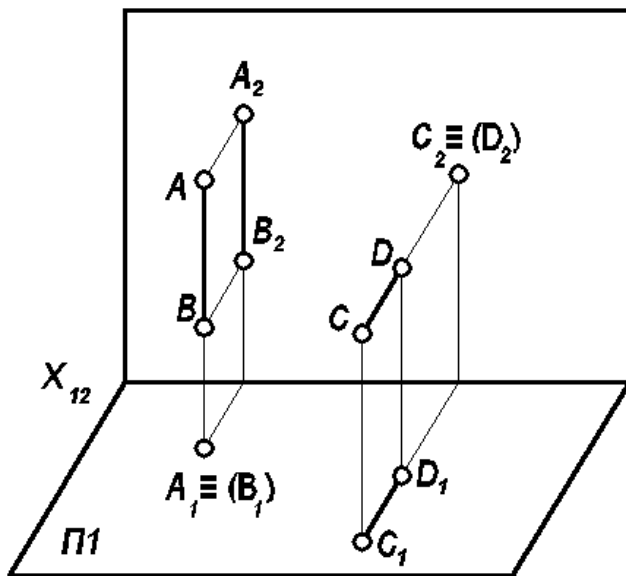


Рисунок 14

Прямая (AB), перпендикулярная плоскости  $\Pi_1$ , называется горизонтально-проецирующей прямой. При этом (смотри рисунок 15):  $A_1 \equiv B_1$  - прямая проецируется в точку на плоскости  $\Pi_1$ ,

$$B_2A_2 = BA \text{ и } A_2B_2 \perp X_{12}.$$

Прямая (CD), перпендикулярная плоскости  $\Pi_2$ , называется фронтально - проецирующей прямой. При этом (смотри рисунок 15):  $C_2 \equiv D_2$  - прямая проецируется в точку на плоскости  $\Pi_2$ ,

$$C_1D_1 = CD \text{ и } C_1D_1 \perp X_{12}$$

Прямая (EF), перпендикулярная плоскости  $\Pi_3$ , называется профильно-проецирующей прямой. При этом (смотри рисунок 15):

$E_3 \equiv F_3$  - прямая проецируется в точку на плоскости  $\Pi_3$ ,

$$E_1F_1 = E_2F_2 = EF \text{ и } E_1F_1 \parallel X_{12} \text{ и } E_2F_2 \parallel X_{12}$$

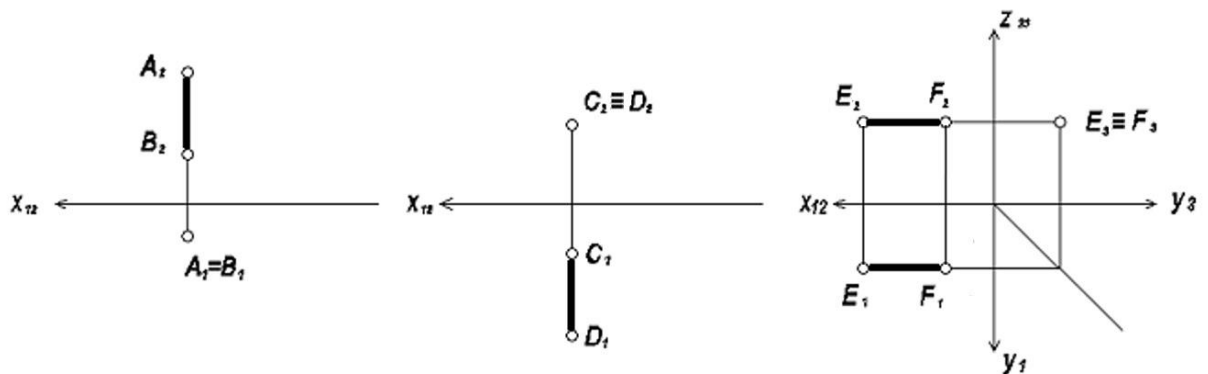


Рисунок 15

## Определение натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов наклона его к плоскостям проекций

Натуральная величина отрезка прямой линии AB и угол  $\alpha$ , составленный им с плоскостью проекций  $\Pi_1$ , могут быть определены из прямоугольного треугольника ( $\triangle ABC$ ), у которого один катет равен проекции отрезка на плоскость проекций  $\Pi_1$  ( $AC = A_1B_1$ ), а другой катет равен разности расстояний концов отрезка от этой плоскости проекций ( $BC = Z_B - Z_A$ ) как показано на рисунке 16.

Натуральную величину прямой (AB) и угол  $\alpha$  с плоскостью  $\Pi_1$  можно определить из  $\Delta A_1B_1B_0$  (смотри рисунок 17), построенного на проекции  $A_1B_1$  и катете  $B_1B_0 = Z_B - Z_A$ . Натуральную величину AB и угол  $\beta$  с плоскостью  $\Pi_2$  можно определить из  $\Delta A_2B_2B_0$  (смотри рисунок 17), построенного на проекции  $A_2B_2$  и катете  $B_2B_0 = Y_A - Y_B$ .

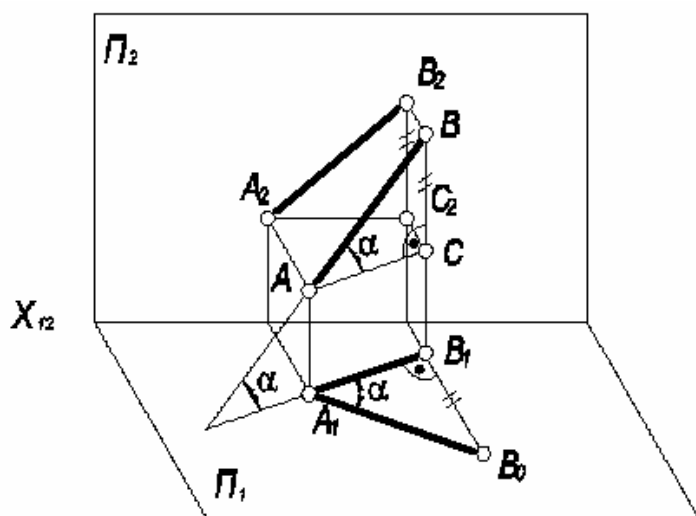


Рисунок 16

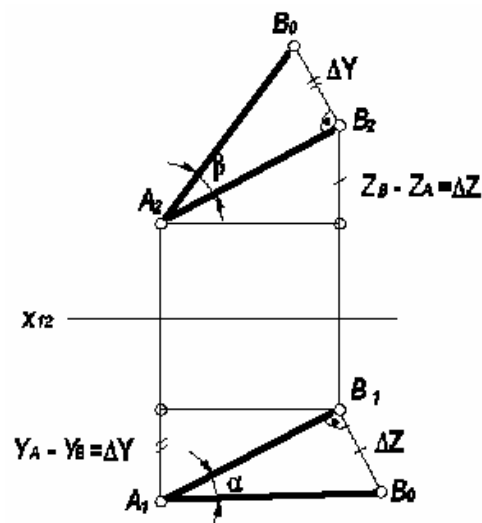


Рисунок 17

### Следы прямой линии

Следами прямой называют точки пересечения ее с плоскостями проекций.

Прямая общего положения имеет три следа, прямая уровня - два следа, проецирующая прямая (смотри рисунок 18) - один след. Точка (·) M пересечения прямой общего положения AB с плоскостью  $\Pi_1$  называется горизонтальным следом (смотри рисунок 18). Точка (·) N пересечения прямой AB с плоскостью  $\Pi_2$  называется

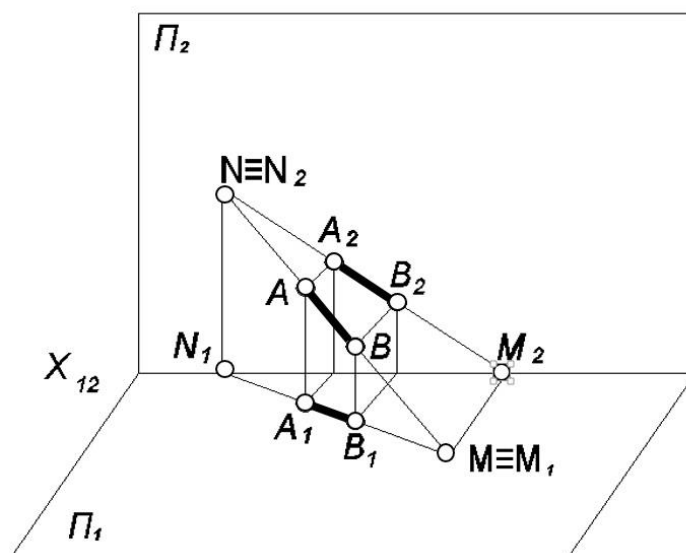


Рисунок 18

фронтальным следом (смотри рисунок 18). Точка (·) P пересечения прямой AB с плоскостью  $\Pi_3$  называется профильным следом. Горизонтальная проекция горизонтального следа совпадает с самим следом ( $M_1=M$ ), а фронтальная проекция горизонтального следа находится на оси  $X_{12}$ .

Фронтальная проекция фронтального следа совпадает с самим следом ( $N_2 \equiv N$ ), а горизонтальная проекция фронтального следа находится на оси  $X_{12}$ . Для определения проекций горизонтального следа АВ необходимо продолжить проекцию  $A_2B_2$  до пересечения с осью  $X_{12}$  получаем точку  $(\bullet) M_2$  - фронтальную проекцию горизонтального следа прямой, проведя прямую через  $(\bullet) M_2 \perp X_{12}$  до пересечения с продолжением  $A_1B_1$ , получаем  $(\bullet) M_1$  - горизонтальную проекцию горизонтального следа.

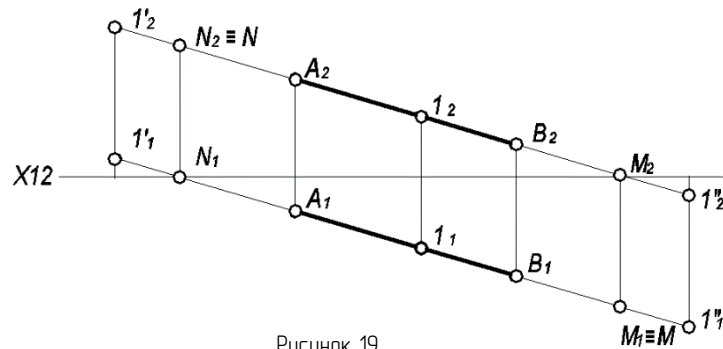


Рисунок 19

Для определения проекций фронтального следа прямой АВ необходимо продолжить проекцию  $A_1B_1$  до пересечения с осью  $X_{12}$ , получаем  $(\bullet) N_1$  - горизонтальную проекцию фронтального следа; проведя через  $(\bullet) N_1$  прямую  $\perp X_{12}$  до пересечения с продолжением  $A_2B_2$ , получаем  $(\bullet) N_2$  - фронтальную проекцию фронтального следа (рисунок 19).

### Взаимное положение двух прямых

Две прямые в пространстве относительно друг друга могут быть параллельными, пересекающимися или скрещивающимися.

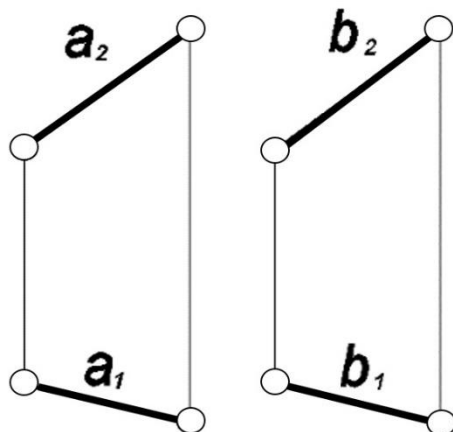


Рисунок 20

#### Параллельные прямые

Одноименные проекции двух параллельных прямых ( $a \parallel b$ ) параллельны, т.е.  $a_1 \parallel b_1$ ,  $a_2 \parallel b_2$ ,  $a_3 \parallel b_3$ , как линии пересечения 2-х параллельных проецирующих плоскостей третьей плоскостью проекций (смотри рисунок 20).

#### Пересекающиеся прямые

Одноименные проекции двух пересекающихся прямых ( $a \cap b$ ) так же пересекаются ( $a_1 \cap b_1$ ,  $a_2 \cap b_2$  и т.д.) в точках ( $K_1$ ,  $K_2$  и т.д.), которые

являются проекциями одной и той же точки, т.е. проекции точки пересечения лежат на соответствующих линиях связи (рисунок 21).

#### Скрещивающиеся прямые

Скрещивающимися называются прямые, которые в пространстве не пересекаются и не параллельны между собой. Одноименные проекции двух скрещивающихся прямых могут пересекаться, но точки пересечения их не лежат на соответствующих линиях связи, так как являются проекциями 2-х точек, принадлежащих различным прямым (рисунок 22)

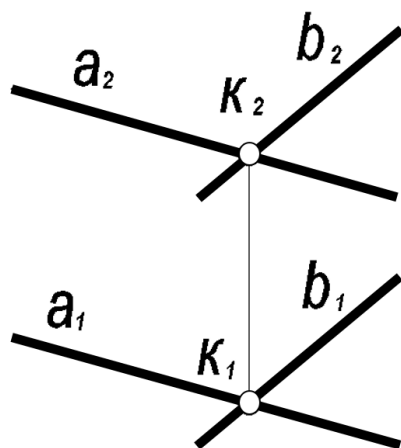


Рисунок 21

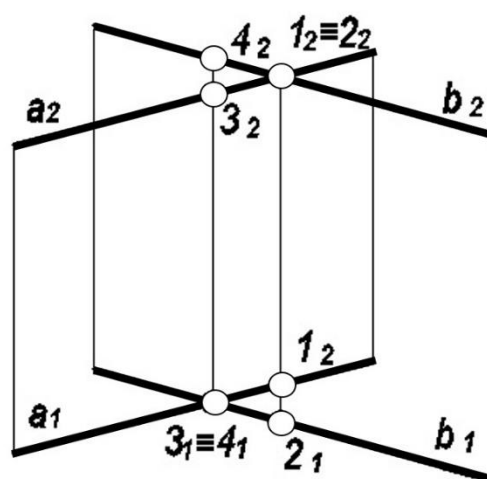


Рисунок 22

### Теорема о проекциях плоских углов

Если одна сторона прямого (острого или тупого) угла параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость угол проецируется в виде прямого (острого или тупого) угла.

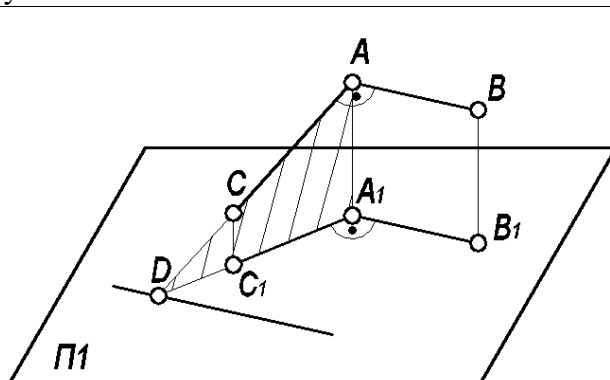


Рисунок 23

Допустим в пространстве находится прямой угол  $\angle CAB = 90^\circ$ ;  $AB \parallel \text{пл. } \Pi_1$ . Требуется доказать, что  $\angle C_1A_1B_1 = 90^\circ$  (рисунок 23).

Продолжаем AC до пересечения с пл.  $\Pi_1$  и через полученную ( $\cdot$ ) D проводим  $l \parallel AB$ .

Плоскость  $ADA_1 \perp AB$  и  $l$ , т.к.  $l \parallel AB$ . Следовательно,  $l \perp AC$  и  $l \perp A_1C_1$ , которые принадлежат пл.  $ADA_1$ . Так как  $l \parallel AB$  и  $AB \parallel A_1B_1$ , то  $l \parallel A_1B_1$ . Следовательно,  $A_1B_1 \perp A_1C_1$ , т. е.  $\angle C_1A_1B_1 = 90^\circ$ .

Допустим в пространстве находится прямой угол ( $\angle CAB = 90^\circ$ ), у которого сторона AB параллельна плоскости  $\Pi_1$  ( $AB \parallel \Pi_1$ ) как показано на рисунке 23. Требуется доказать, что угол  $\angle C_1A_1B_1 = 90^\circ$ .

Продолжим сторону AC до пересечения с плоскостью  $\Pi_1$  и через точку пересечения D проведём в плоскости прямую  $l$ , параллельную AB ( $l \parallel AB$ ). Прямые AB,  $A_1B_1$ ,  $l$  параллельны между собой. AC перпендикулярна прямой  $l$ ; следовательно, плоскость ADA<sub>1</sub> перпендикулярна прямой  $l$ , а так же к  $A_1B_1$ , т. е. угол CAB – прямой ( $\angle C_1A_1B_1 = 90^\circ$ ).

### Плоскости

#### Задание плоскости

Положение плоскости в пространстве определяется отдельными геометрическими элементами, поэтому плоскость задается проекциями этих элементов (смотри рисунок 24):

Плоскость может быть задана:

- а) тремя точками, не лежащими на одной прямой (рисунок 24а);
- б) прямой и точкой, взятой вне прямой (рисунок 24б);
- в) двумя пересекающимися прямыми (рисунок 24в);
- г) двумя параллельными прямыми (рисунок 24г);
- д) плоской геометрической фигурой (рисунок 24д).

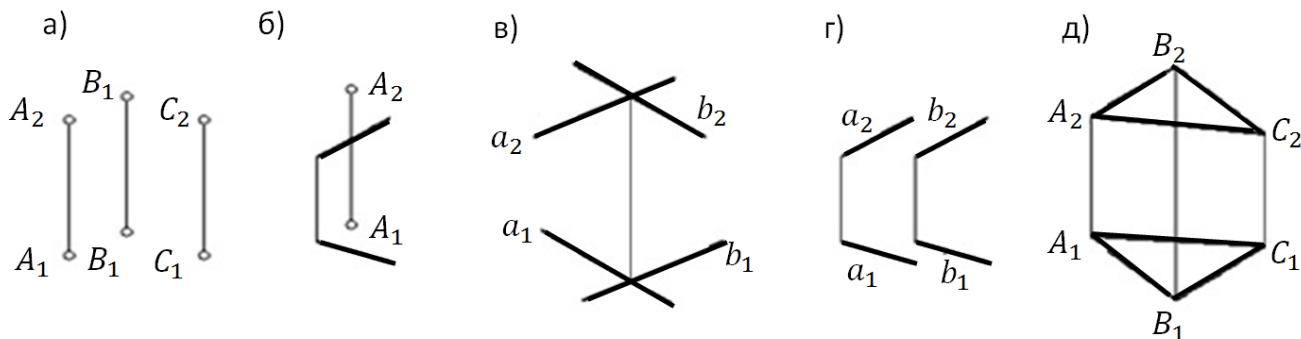


Рисунок 24

В системе фиксированных плоскостей проекций плоскость может быть задана следами, т.е. линиями, по которым она пересекает плоскость проекций (рисунок 25).

Из образованных при этом прямоугольных треугольников на 3-х картинном комплексном чертеже на рисунке 25 видно, что катеты их соответственно равны:  $k_1 = l_2$ ;  $k_3 = l_2$ ;  $l_3 = m_1$ ;  $m_2 = k_3$ .

В общем случае плоскость имеет три следа:  $l$  - горизонтальный след плоскости;  $k$  - фронтальный след плоскости;  $m$  - профильный след плоскости. Точки схода следов лежат на соответствующих осях проекции и для построения чертежа плоскости достаточно знать

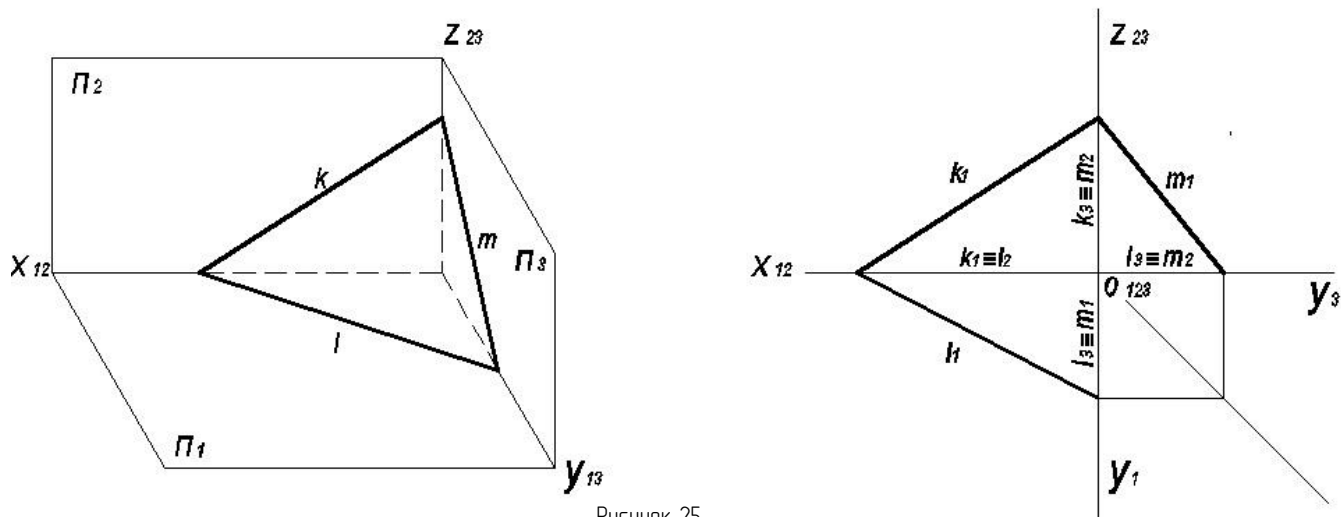


Рисунок 25

координаты точек в системе осей  $x, y, z$ , так как две другие координаты каждой точки равны нулю.

Для нахождения проекции следов плоскости необходимо построить проекции двух точек, принадлежащих каждой следу.

### Прямая и точка в плоскости

Прямая принадлежит плоскости, если она имеет с плоскостью две общие точки.

Пример: Прямая 1 принадлежит плоскости ( $a \cap b$ ), так как  $(\cdot)1$  этой прямой принадлежит прямой, а и  $(\cdot)2$  - прямой  $b$ , лежащих в заданной плоскости (рисунок 26).

Точка принадлежит плоскости, если она находится на прямой, принадлежащей данной плоскости.

Пример: Точка D принадлежит плоскости, заданной треугольником ( $\triangle ABC$ ), так как она находится на прямой 1-2, расположенной в этой плоскости (рисунок 27).

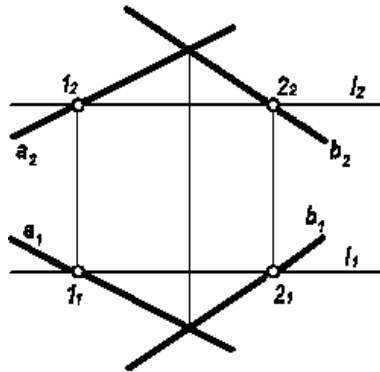


Рисунок 26

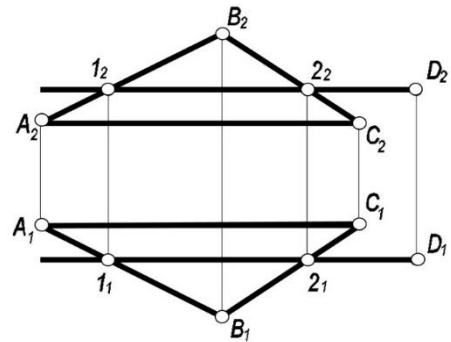


Рисунок 27

### Прямые особого положения плоскости

Прямыми особого положения называют прямые уровня и линии наибольшего наклона или ската плоскости.

#### Прямые уровня плоскости

Прямой уровня плоскости называют прямую, принадлежащую плоскости и параллельную одной из плоскостей проекций (рисунок 28).

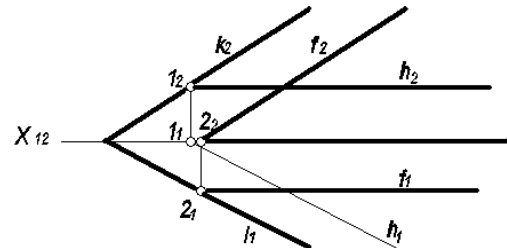
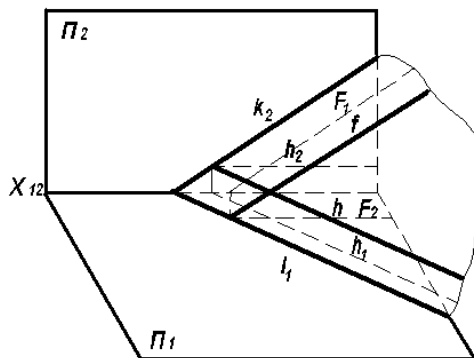


Рисунок 28

Прямая  $h$ , принадлежащая плоскости и параллельная плоскости  $\Pi_1$ , называется горизонтальной прямой уровня или горизонталью. При этом  $h_2 \parallel X_{12}$ ,  $h_1 \parallel l_1$ .

Прямая  $f$ , принадлежащая плоскости и параллельная плоскости  $\Pi_2$ , называется фронтальной прямой уровня или фронталью. При этом  $f_1 \parallel X_{12}$ ,  $f_2 \parallel k_2$ .

Прямая  $p$ , принадлежащая плоскости и параллельная плоскости  $\Pi_3$ , называется профильной прямой уровня или профильной прямой. При этом  $p_1 \perp X_{12}$  и  $p_2 \perp X_{12}$ ,  $p_3 \parallel m_3$ . Например: В плоскости  $\triangle ABC$  провести горизонталь и фронталь (рисунок 28). Проекции горизонтали строим, начиная с ее фронтальной проекции  $h_2 \parallel X_{12}$  (линия  $A_21_2$ ) – горизонтальная проекция горизонтали  $h_1$  находится построением (линия  $A_11_1$ ). Аналогично строятся проекции фронтали:  $f \parallel X_{12}$  (линия  $C_12_1$ ).  $f_2$  - находится построением (линия  $C_22_2$ ).



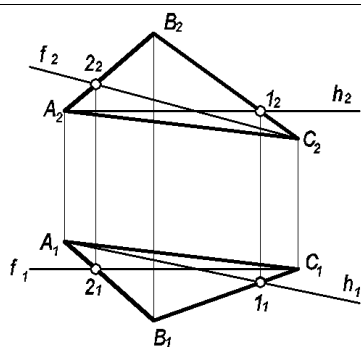


Рисунок 29

Например: В плоскости  $\triangle ABC$  провести горизонталь и фронталь (Рисунок 29). Проекции горизонтали строим, начиная с ее фронтальной проекции  $h_2 \parallel X_{12}$  (линия  $A_21_2$ ) – горизонтальная проекция горизонтали  $h_1$  находится построением (линия  $A_11_1$ ). Аналогично строятся проекции фронтали:  $f \parallel X_{12}$  (линия  $C_12_1$ ).  $f_2$  находится построением (линия  $C_22_2$ ).

### Линии наибольшего наклона или ската плоскости

Линии наибольшего наклона плоскости – это прямые, принадлежащие плоскости и составляющие наибольший угол с плоскостью проекций. Линии наибольшего наклона перпендикулярны к следам данной плоскости. В плоскости общего положения различают линии наибольшего наклона: относительно плоскостей  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$ . Нетрудно доказать, что такие линии перпендикулярны к соответствующим следам или линиям уровня плоскости. Прямая  $BK$  – линия наибольшего наклона плоскости  $\triangle ABC$  к плоскости  $\Pi_1$ .  $B_1K_1 \perp h_1$ ,  $B_2K_2$  – находится построением. Прямая  $BF$  – линия наибольшего наклона плоскости  $\triangle ABC$  к плоскости  $\Pi_2$ .  $B_2F_2 \perp f_2$ ,  $B_1F_1$  – находится построением (рисунок 30).

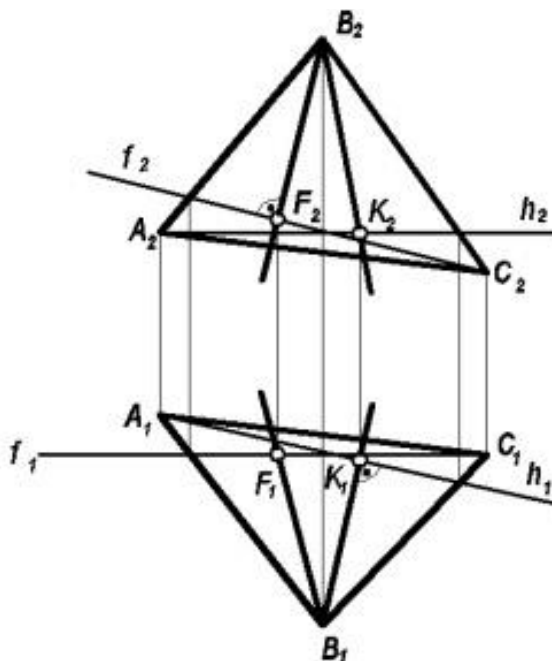


Рисунок 30

### Расположения плоскостей относительно системы плоскостей проекции

Плоскость в пространстве может занимать различные положения относительно системы плоскостей проекции.

## Плоскости частного положения

В отличие от плоскостей общего положения различают плоскости частного положения, которые перпендикулярны или параллельны одной из плоскостей проекций.

### Проецирующие плоскости

Проецирующими называются плоскости, перпендикулярные одной из плоскостей проекций.

Плоскость, перпендикулярная плоскости  $\Pi_1$ , называется горизонтально-проецирующей. Плоскость, перпендикулярная плоскости  $\Pi_2$ , называется фронтально-проецирующей. Плоскость, перпендикулярная плоскости  $\Pi_3$ , называется профильно-проецирующей.

Основное свойство проецирующих плоскостей: все фигуры, расположенные в проецирующей плоскости проецируются в прямую линию, на ту из плоскостей проекций, к которой перпендикулярна данная плоскость.

Например, треугольник  $ABC$  расположенный в горизонтально-проецирующей плоскости  $\alpha$  проецируется на плоскость  $\Pi_1$  в виде линии (рисунок 31).

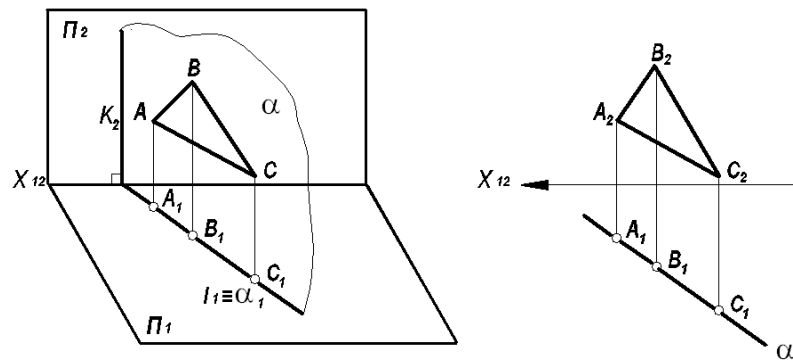


Рисунок 31

### Плоскости уровня

Плоскостями уровня называются плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций.

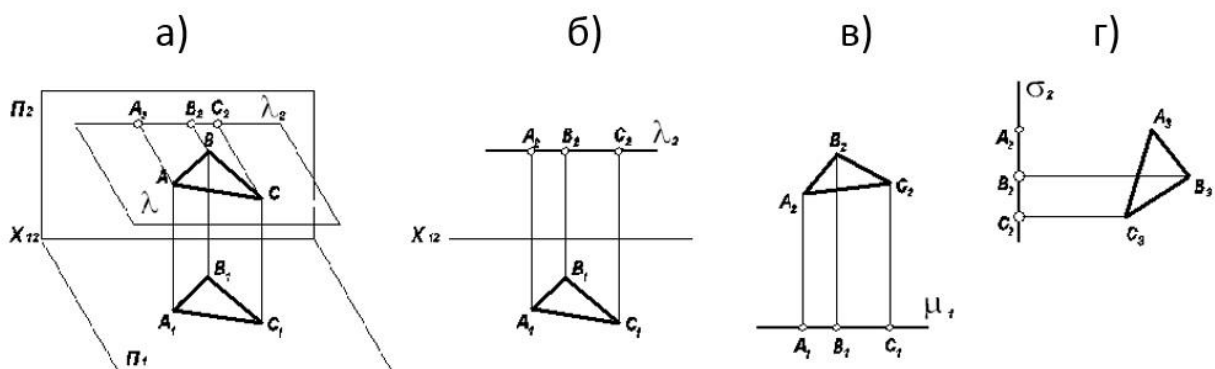


Рисунок 32

Например, треугольник  $ABC$  (рисунок 32а), расположенный в горизонтальной плоскости уровня  $\lambda$  проецируется на плоскость  $\Pi_1$  в натуральную величину  $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ , а на плоскость  $\Pi_2$  — в линию, на след плоскости.

Плоскость  $\lambda$ , параллельная плоскости  $\Pi_1$ , называется горизонтальной плоскостью уровня ( $\lambda_2 \parallel x_{12}$ ) (рисунок 32б).

Плоскость  $\mu$ , параллельная плоскости  $\Pi_2$ , называется фронтальной плоскостью уровня ( $\mu_1 \parallel x_{12}$ ) (рисунок 32в)

Плоскость  $\sigma$ , параллельная плоскости  $\Pi_3$ , называется профильной плоскостью уровня ( $\sigma_2 \parallel z_{23}$ ) (рисунок 32г).

Основное свойство плоскостей уровня: все фигуры, расположенные в плоскости уровня, проецируются в натуральную величину на ту плоскость проекций, которой параллельна данная плоскость уровня.

## Относительное положение двух плоскостей

Две плоскости в пространстве относительно друг друга могут быть взаимно параллельными или пересекающимися.

### Плоскости параллельны

Если две плоскости в пространстве взаимно параллельны, то их одноименные следы должны быть параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей (плоскостью проекций  $\Pi_1, \Pi_2$ , или  $\Pi_3$ ).

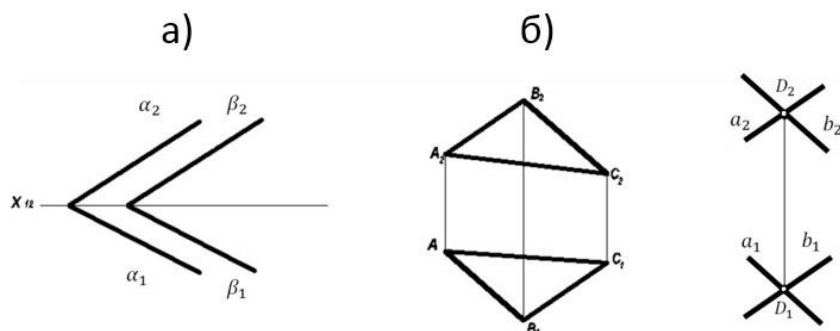


Рисунок 33

Для параллельности двух плоскостей общего положения, заданных следами (рисунок 33а) необходимо, чтобы одноименные следы плоскостей были параллельны:  $\alpha_1 \parallel \beta_1, \alpha_2 \parallel \beta_2$ .

Из геометрии известно, что если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны (рисунок 33б), поэтому для построения плоскости, параллельной заданной ( $\Delta ABC$ ), необходимо через соответствующие проекции точки D провести две пересекающиеся прямые, параллельные соответствующим проекциям двух пересекающихся прямых, лежащих в данной плоскости:  $a_2 \parallel A_2B_2, b_2 \parallel B_2C_2, a_1 \parallel A_1B_1, b_1 \parallel B_1C_1$ .

### Плоскости пересекаются

Если две плоскости в пространстве пересекаются, то они имеют одну общую прямую, называемую линией пересечения. Задача на определение линии пересечения сводится к построению проекций двух точек, общих для пересекающихся плоскостей.

## Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью

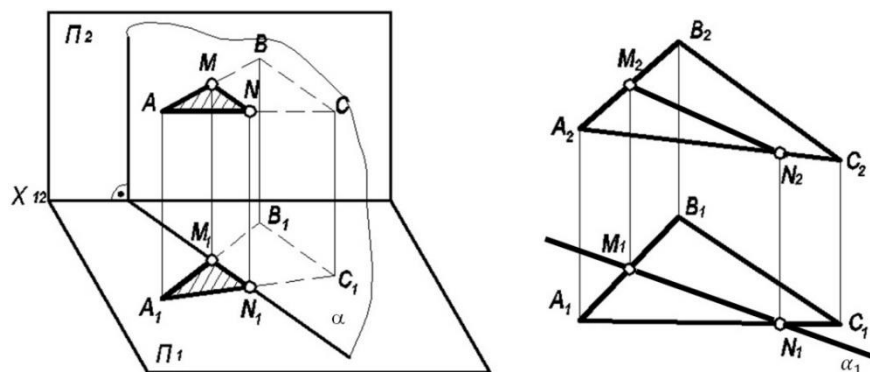


Рисунок 34

При пересечении плоскости общего положения ( $\Delta ABC$ ) с проецирующей, например, с горизонтально-проецирующей плоскостью  $\alpha$ , одна из проекций (горизонтальная) линии пересечения совпадает со следом проецирующей плоскости ( $M_1N_1 \equiv \alpha_1$ ), а вторая - ( $M_2N_2$ ) находится построением на соответствующих элементах, задающих плоскость общего положения.

На рисунке 34 приводится построение проекции линии пересечения плоскости общего положения, заданной ( $\Delta ABC$ ) с горизонтально-проецирующей плоскостью. Горизонтальная проекция линии пересечения плоскостей находится на горизонтальном следе проецирующей плоскости и определяется точками  $M_1$  и  $N_1$  - пересечения следа горизонтальных проекций линий  $A_1$  и  $B_1$  и  $A_1$  и  $C_1$  треугольника со следом  $\alpha_1$ . Фронтальная проекция линии пересечения  $M_2N_2$  находится по точкам  $M_1$  и  $N_1$  с помощью линий связи.

## Пересечение двух плоскостей общего положения

Линия пересечения двух плоскостей общего положения может определяться путем последовательного построения точек пересечения линий одной плоскости с другой и наоборот или же при помощи вспомогательных проецирующих плоскостей, называемых плоскостями-посредниками. Способ плоскостей-посредников заключается в том, что обе заданные пересекающиеся плоскости пересекаются третьими, вспомогательными плоскостями

(например,  $\lambda$  и  $\mu$  как на рисунке 35), а точки  $M$  и  $N$ , принадлежащие линии пересечения плоскостей, находятся как точки пересечения линий пересечения данных плоскостей со вспомогательными. Точка  $M$  лежит на пересечении линий 1-2 и 3-4, а точка  $N$  - на пересечении 5-6 и 7-8.

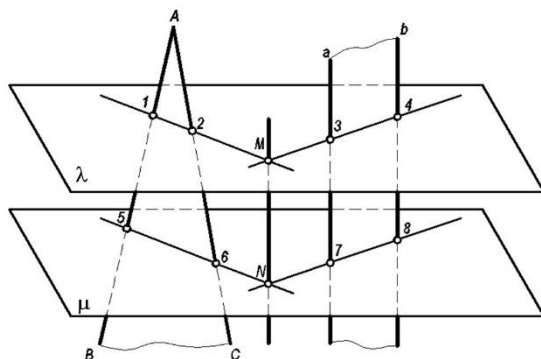


Рисунок 35

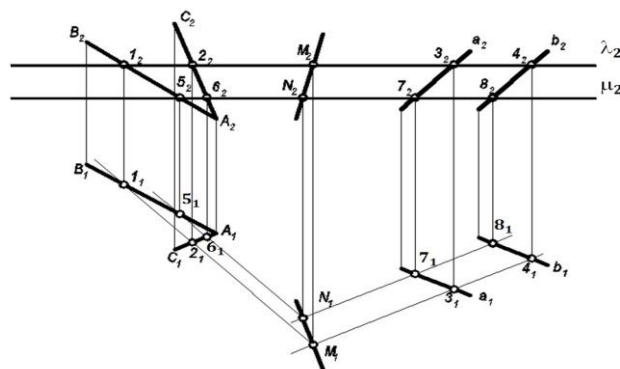


Рисунок 36

В качестве вспомогательных плоскостей-посредников используются проецирующие или плоскости уровня. На рисунке 36 показано определение линии пересечения плоскости, заданной пересекающимися прямыми ( $AB \cap AC$ ) с плоскостью, заданной параллельными прямыми ( $a/v$ ) при помощи двух горизонтальных плоскостей уровня  $\lambda$  и  $\mu$ . Сначала находим проекции линий пересечения каждой из заданных плоскостей с плоскостью  $\lambda$ . В результате получим прямые пересечения 1-2 и 3-4. Горизонтальные проекции этих прямых пересекаются в точке  $M_1$ , фронтальная проекция  $M_2$  находится с помощью линии связи на следе плоскости  $\lambda_2$ . Точно так же находим проекции линий пересечения заданных плоскостей с плоскостью  $\mu$  и проекции  $N_1$  и  $N_2$  второй точки искомой линии пересечения.

### 5.1. Относительное положение прямой и плоскости

В пространстве прямая относительно плоскости может занимать следующие положения: принадлежать плоскости, быть параллельной плоскости или пересекаться с данной плоскостью.

#### Прямая принадлежит плоскости

Прямая принадлежит плоскости, если две точки этой прямой принадлежат плоскости.

#### Прямая параллельная плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной из прямых, принадлежащих плоскости (рисунок 37). Задача на построение прямой, параллельной плоскости, сводится к проведению в пространстве прямой, параллельной какой-либо прямой, лежащей в данной плоскости.

Например: через точки  $D$  и  $E$  необходимо провести прямые, параллельные заданной плоскости ( $\triangle ABC$ ). В данной плоскости проводим любую прямую 1-2, заданную проекциями  $1_1 2_1$  и  $1_2 2_2$ . Через точку  $D$  проведена прямая  $a$ , параллельная прямой (1-2), принадлежащей плоскости ( $\triangle ABC$ ), соответственно:  $a_1 \parallel (1_1 2_1)$  и  $a_2 \parallel (1_2 2_2)$ .

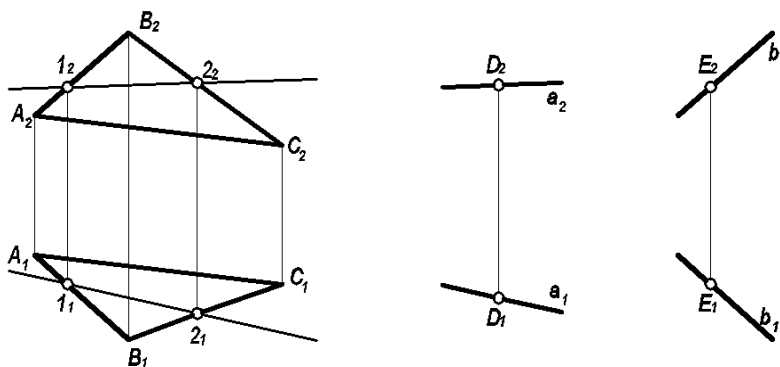


Рисунок 37

Аналогично через точку  $E$  проведена прямая  $b$ , параллельная прямой  $AB$ , принадлежащей плоскости ( $\triangle ABC$ ), соответственно:  $b_1 \parallel (A_1 B_1)$ ,  $b_2 \parallel (A_2 B_2)$ .

#### Прямая пересекается с плоскостью

Прямая, пересекающаяся с плоскостью, имеет с плоскостью одну общую точку, называемую точкой встречи или пересечения.

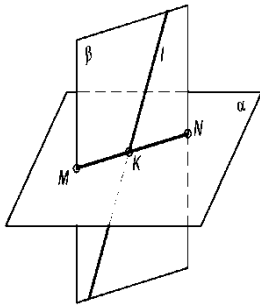


Рисунок 38

Для определения точки встречи прямой  $l$  с заданной плоскостью общего положения  $\alpha$  необходимо (рисунок 38):

- 1). Через данную прямую  $l$  провести вспомогательную плоскость  $\beta$ ;
- 2). Построить прямую  $MN$  пересечения данной плоскости  $\alpha$  и вспомогательной плоскости  $\beta$ ;
- 3). Найти положение точки  $K$  на пересечении заданной прямой  $l$  с построенной прямой  $MN$ . В качестве вспомогательной плоскости, как правило, берется проецирующая плоскость.

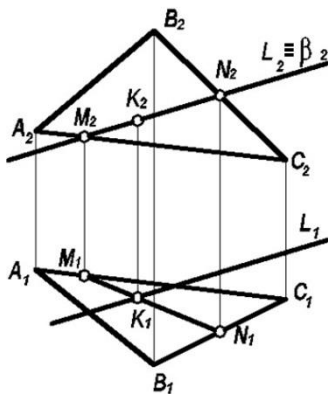


Рисунок 39

Для определения точки пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $(\Delta ABC)$  заключаем прямую во фронтально-проецирующую плоскость  $\beta$  (рисунок 39). При этом, фронтальный след плоскости  $\beta$  совпадает с фронтальной проекцией прямой  $l$  ( $\beta_2 \equiv l_2$ ). Определяем проекции линии  $MN$  пересечения плоскостей  $(\Delta ABC)$  и  $\beta$ . На пересечении прямых  $l$  и  $M_1N_1$  находится точка  $K_1$  - горизонтальная проекция точки пересечения, по которой с помощью линии связи на прямой  $l_2$  находим фронтальную проекцию искомой точки  $K_2$ .

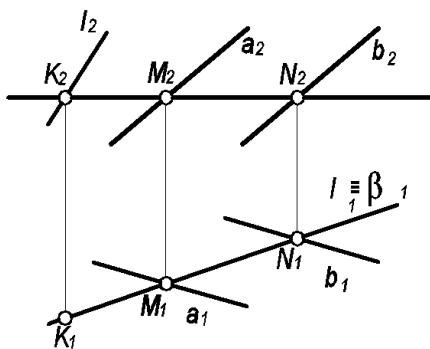


Рисунок 40

Например: Определить точку пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $\alpha(a//v)$ , заданной параллельными прямыми (рисунок 40).

Прямую  $l$  заключаем в горизонтально-проецирующую плоскость  $\beta$  ( $\beta_1 \equiv l_1$ ). Определяем линию пересечения  $MN$  плоскостей  $\alpha(a // v)$  и  $\beta$ . На пересечении  $l_2$  и  $M_2N_2$  находится  $(\cdot)K_2$  - фронтальная проекция искомой точки, по которой с помощью линии связи строится горизонтальная проекция точки  $K_1$ .

## Определение видимости геометрических элементов на комплексном чертеже

Видимость отдельных элементов проецируемых фигур на плоскости проекций устанавливается с помощью точек, расположенных на одном проецирующем луче и называемых «конкурирующими».

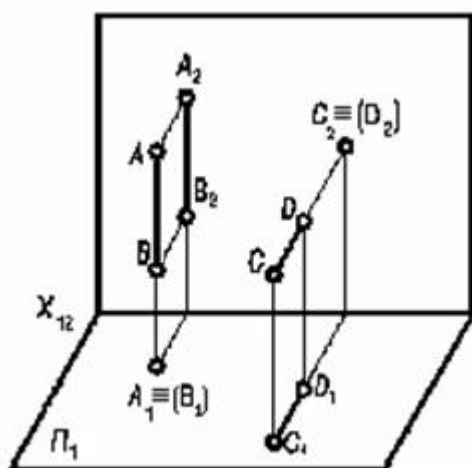


Рисунок 41

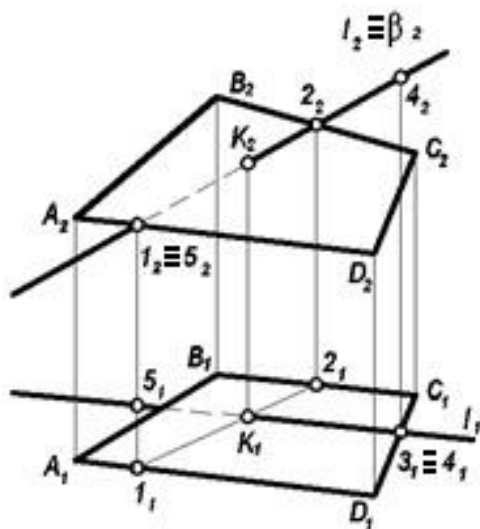


Рисунок 42

Из двух «конкурирующих» точек видимой считается та точка, которая расположена дальше от плоскости проекций. Для прямой  $AB \perp \Pi_1$ , видимой на горизонтальной проекции будет  $(\cdot) A_1$ . По той же причине для прямой  $CD$  видимой на фронтальной проекции будет  $(\cdot) C_2$  (рисунок 41).

Например: Найти точку пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $\alpha$  и определить видимость (рисунок 42).

Для определения точки пересечения  $K$  заключаем прямую  $l$  во фронтально-проецирующую плоскость  $\beta$ .

Видимость прямой  $l_1$  на горизонтальной проекции определяем с помощью конкурирующих точек 3 и 4 ( $3_1 \equiv 4_1$ ). С помощью фронтальных проекций этих точек ( $3_2$  и  $4_2$ ) устанавливаем, что  $(\cdot) 4_2$ , принадлежащая прямой  $l$ , расположена выше  $(\cdot) 3_2$ , принадлежащей плоскости. Поэтому, на горизонтальной проекции отрезок прямой  $l_1$  до  $(\cdot) K_1$  будет видимым. Видимость отрезка  $l_2$  на фронтальной проекции устанавливается аналогично с помощью конкурирующих точек 1 и 5. Точка  $(\cdot) 1_2$ , принадлежащая плоскости  $\alpha$ , расположена дальше от плоскости  $\Pi_2$ , чем точка  $(\cdot) 5_2$ , принадлежащая прямой  $l$ . Поэтому на фронтальной проекции отрезок  $l_2$  от  $(\cdot) 5_2$  до  $(\cdot) K_2$  будет невидимым

## 6. Перпендикулярность прямой и плоскости, двух прямых, двух плоскостей

### *Теорема о проекции плоских прямых углов*

Если одна сторона плоского прямого угла параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость прямой угол проецируется без искажения, т.е. в виде прямого.

### *Прямая перпендикулярная к плоскости*

Прямая  $l$ , перпендикулярная к плоскости  $\alpha$ , с любой прямой, расположенной в этой плоскости, пересекается или скрещивается под прямым углом.

Проведем через точку пересечения  $(\cdot) K$  прямой  $l$  с плоскостью  $\alpha$  прямые уровня горизонталь  $h$  и фронталь  $f$ . Прямой угол, составленный прямой  $l$  с горизонталью  $h$  на плоскость  $\Pi_1$ , спроецируется без искажения на основании теоремы о проекции плоского прямого угла. По этой же причине, прямой угол, составленный прямой  $l$  с фронталью  $f$  на плоскость  $\Pi_2$ , спроецируется без искажения (рисунок 43).

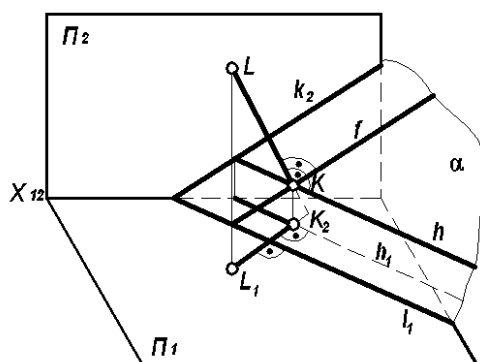


Рисунок 43

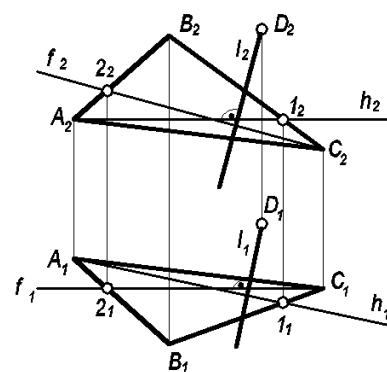


Рисунок 44

Следовательно, если прямая перпендикулярна плоскости, то ее горизонтальная проекция перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали (любой) или горизонтальному следу плоскости, а фронтальная проекция этой прямой - перпендикулярна фронтальной проекции фронтали (любой) или фронтальному следу плоскости.

Например: через  $(\cdot)D$  провести прямую  $l \perp$  плоскости  $\Delta(ABC)$  (рисунок 44).

В плоскости  $\Delta(ABC)$  проводим горизонталь  $h$  и фронталь  $f$ . Через точку  $D_1$  проводим горизонтальную проекцию искомой прямой  $l_1 \perp h_1$ . Через точку  $D_2$  проводим фронтальную проекцию искомой прямой  $l_2 \perp f_2$ . При необходимости определяется основание перпендикуляра и его натуральная величина.

### Взаимно – перпендикулярные прямые

Проведение в пространстве двух взаимно-перпендикулярных прямых сводится к построению перпендикуляра, опущенного из точки на прямую вне ее.

Допустим, необходимо через точку  $A$  провести прямую  $a$ , перпендикулярную прямой  $l$  (рисунок 45).

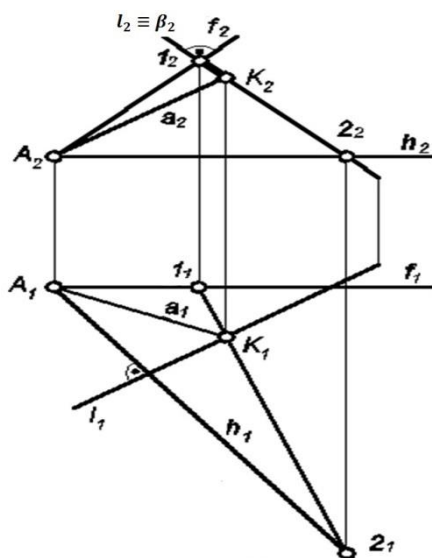


Рисунок 45

Решение этой задачи основано на использовании теоремы о том, что прямая перпендикулярная плоскости пересекается под прямым углом с любой прямой, расположенной в этой плоскости и проходящей через точку пересечения. Поэтому, через точку  $A$  необходимо провести плоскость  $(h \cap f)$ , перпендикулярную прямой  $l$ ; найти точку  $K$  – пересечения прямой  $l$  с проведенной плоскостью. Тогда точки  $A$  и  $K$  определяют положение прямой  $a \perp l$ .



## Взаимно – перпендикулярные плоскости

Две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в пространстве взаимно перпендикулярны, если одна из них плоскость  $\alpha$  проходит через перпендикуляр к другой плоскости  $\beta$  или перпендикулярна к прямой, расположенной в другой плоскости  $\beta$ .

Допустим, через точку  $D$  необходимо провести плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную плоскости  $\beta$  ( $\Delta ABC$ ) (рисунок 46).

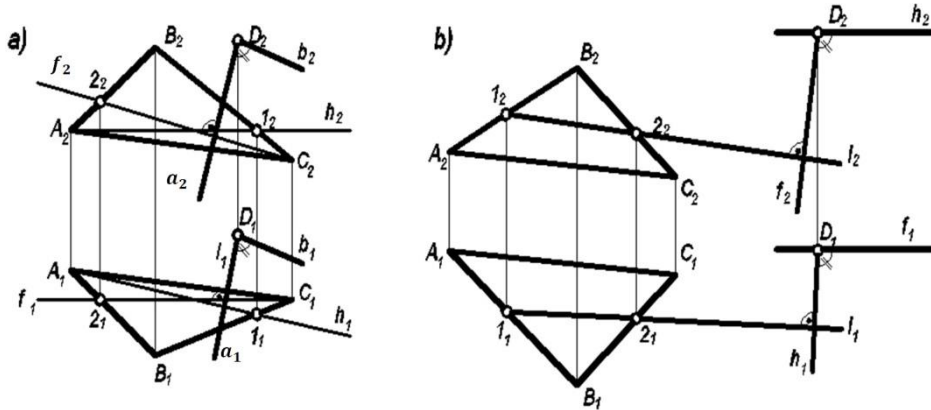


Рисунок 46

а). В первом случае, плоскость  $\alpha$  задается двумя пересекающимися прямыми  $\alpha(a \cap b)$ , из которых прямая  $a \perp$  плоскости  $\Delta(ABC)$ , прямая  $b$  – взята произвольно.

б). Во втором случае плоскость  $\alpha$  задается двумя пересекающимися линиями уровня  $\alpha(h \cap f)$ , образующими плоскость, перпендикулярную прямой  $l$ , расположенной в плоскости  $\beta$  ( $\Delta(ABC)$ ).

## 7. Способы преобразования комплексного чертежа

Проецируемые объекты в пространстве располагаются, как правило, в общем положении по отношению к плоскости проекций, что затрудняет решение целого ряда задач, особенно, связанных с измерениями различных элементов: объекта, предмета или системы. Поэтому производят преобразование комплексного чертежа так, чтобы новое изображение предмета (или системы) соответствовало его частному положению, при котором упрощается решение пространственной задачи.

Преобразование комплексного чертежа может проводиться двумя способами:

1. Изменением положения плоскостей проекций при неизменном положении предметов в пространстве (метод замены плоскостей проекций).
2. Изменением положения предметов в пространстве при неизменном положении плоскостей проекций (способы: плоско - параллельное перемещение, вращение вокруг проецирующей прямой, вращение вокруг линии уровня и др.).

### 7.1. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что положение предметов в пространстве остается неизменным, а система плоскостей проекций ( $\Pi_1$ - $\Pi_2$ ) последовательно заменяется новой системой взаимно-перпендикулярных плоскостей проекций. При этом каждая новая плоскость проекций берется перпендикулярно к одной из оставшихся плоскостей проекций старой системы и соответствующим образом ориентируется в пространстве относительно системы предметов.

В зависимости от сложности задачи производится замена одной или обеих плоскостей проекций исходной системы ( $\Pi_1$ - $\Pi_2$ ).

### Замена одной плоскости проекций

При замене одной плоскости проекций  $\Pi_2$  на новую  $\Pi_4$ , перпендикулярную одной из оставшихся плоскостей проекций  $\Pi_1$ , расстояние новой проекции точки  $A_4$  от новой оси  $X_{14}$  равно расстоянию заменяемой проекции точки  $A_2$  от заменяемой оси  $X_{12}$ , т.е.  $A_4A_{14} = A_2A_{12}$  (рисунок 47).

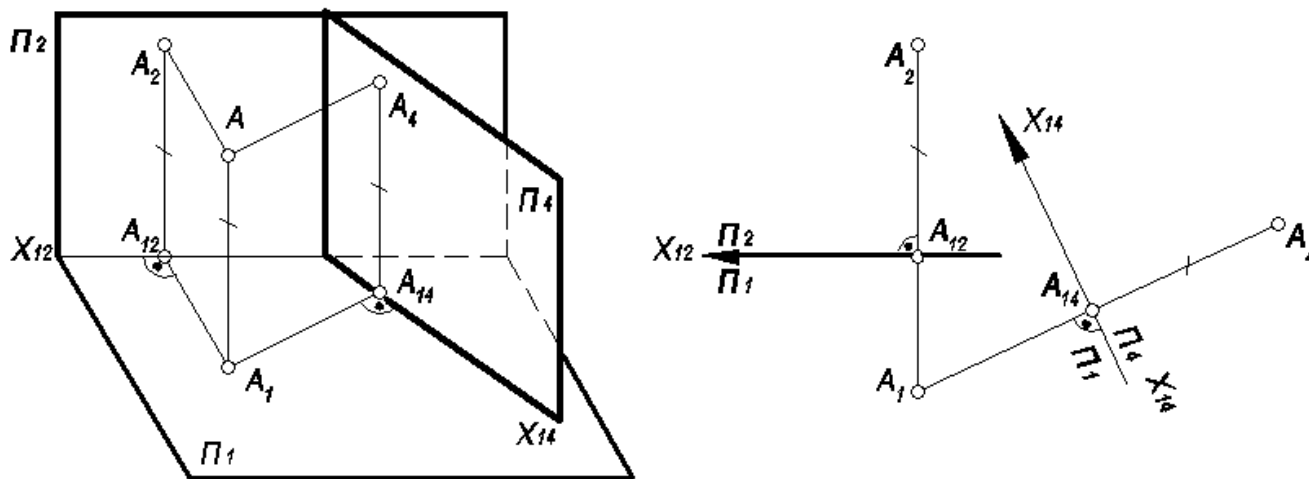


Рисунок 47

Пример 1: Определить натуральную величину отрезка прямой (рисунок 48).

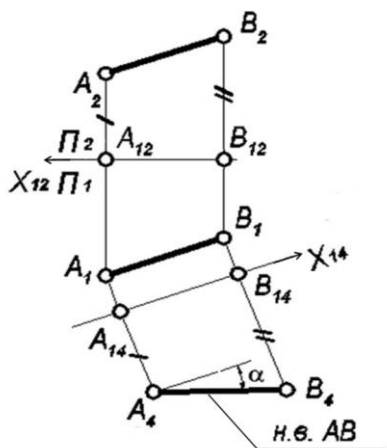


Рисунок 48

Заменяем плоскость  $\Pi_2$  на плоскость  $\Pi_4$ . При этом  $\Pi_4 \perp \Pi_1$ . Плоскость  $\Pi_4$  берем параллельно  $AB$  в пространстве. При этом на чертеже новая ось  $X_{14} \parallel A_1B_1$ . Через точки  $A_1$  и  $B_1$  проводим прямые, перпендикулярные  $X_{14}$  и откладываем отрезки  $A_4A_{14} = A_2A_{12}$ ,  $B_4B_{14} = B_2B_{12}$ . Отрезок  $A_4B_4 = AB$ , т.к.  $AB$  стала линией уровня – фронталью относительно плоскости  $\Pi_4$ .

Пример 2: Преобразовать плоскость общего положения  $\alpha$  ( $\Delta(ABC)$ ) в горизонтально-проецирующую (рисунок 49).

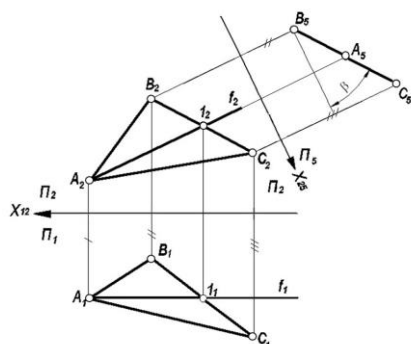


Рисунок 49

В плоскости  $\alpha$  ( $\Delta(ABC)$ ) проводим фронталь  $f$ . Заменяем плоскость  $\Pi_1$  на новую  $\Pi_5 \perp \Pi_2$ . При этом,  $\Pi_5$  берется перпендикулярно фронтالي  $f$  в пространстве. На чертеже новая ось проекций  $X_{25} \perp f_2$ . На плоскости  $\Pi_5$  плоскость  $\alpha(\Delta(ABC))$  проецируется в линию  $B_5A_5C_5$ .

## Замена двух плоскостей проекций

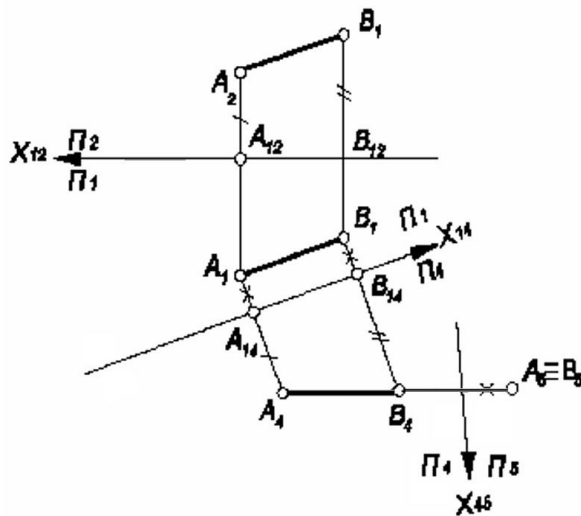


Рисунок 50

Замена обеих плоскостей проекций исходной системы производится последовательно по правилу замены одной плоскости проекций, которое применяется дважды.

Пример 1: Преобразовать отрезок прямой общего положения АВ в горизонтально - проецирующую прямую. Заменой плоскости  $\Pi_2$  на плоскость  $\Pi_4$  преобразуем прямую АВ во фронталь. При этом, ось  $X_{14} // A_1B_1$ . Второй заменой плоскости  $\Pi_1$  на плоскость  $\Pi_5$  преобразуем прямую АВ в горизонтально - проецирующую прямую. При этом ось  $X_{45} \perp A_4B_4$ . На плоскость  $\Pi_5$  прямая АВ проецируется в  $(\cdot)A_5 \equiv B_5$  (рисунок 50).

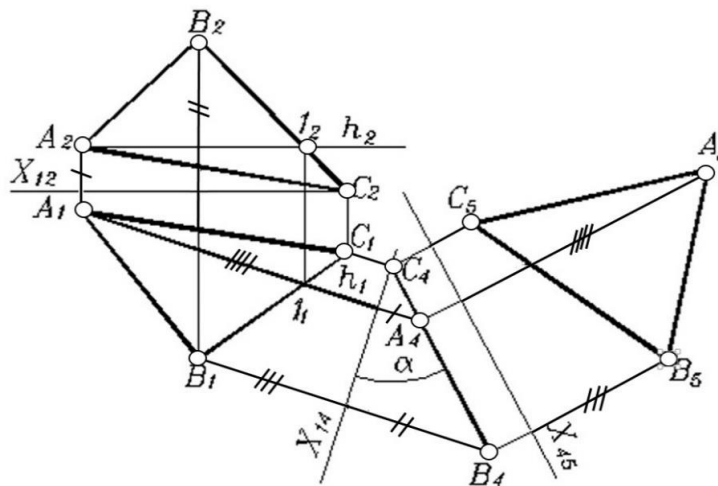


Рисунок 51

Пример 2: Определить натуральную величину плоскости  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ), расположенного в плоскости общего положения.

В плоскости  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) проводим горизонталь  $h$ . Заменяем плоскость  $\Pi_2$  на плоскость  $\Pi_4 \perp \Pi_1$ . Плоскость  $\Pi_4 \perp$  плоскости  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) и  $\perp$  горизонтали  $h$ . На чертеже ось  $X_{14} \perp h_1$ . На плоскость  $\Pi_4$  плоскость  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) проецируется в линию  $C_4A_4B_4$ .

Заменяем плоскость  $\Pi_1$  на плоскость  $\Pi_5 \perp \Pi_4$ . Плоскость  $\Pi_5 //$  плоскости  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ). На чертеже ось  $X_{45} // C_4A_4B_4$ . На плоскость  $\Pi_5$  плоскость  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) проецируется в натуральную величину, т.е.  $\triangle A_5B_5C_5 = \triangle ABC$  (рисунок 51).

## 7.2. Способ плоско - параллельного перемещения

Плоско - параллельным называется такое перемещение фигуры в пространстве, при котором все точки ее перемещаются в плоскостях, параллельных между собой.

Если фигура в пространстве совершает плоско-параллельное перемещение относительно какой-либо плоскости проекций (например,  $\Pi_1$ ), то проекция фигуры на эту плоскость проекций перемещается, оставаясь равной самой себе (плавающая проекция); на другой плоскости проекций  $\Pi_2$  при этом все точки проекций фигуры перемещаются по прямым, параллельным оси проекций  $X_{12}$ .

В зависимости от сложности задачи плоско-параллельное перемещение производится относительно одной или последовательно относительно двух плоскостей проекций.

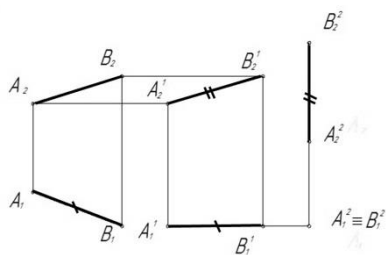


Рисунок 52

Пример 1: Прямую АВ преобразовать в горизонтально-проецирующую прямую.

Плоско-параллельным перемещением относительно плоскости  $\Pi_1$  преобразуем АВ во фронталь. При этом новая горизонтальная проекция прямой  $A_1 B_1 = A_1^1 B_1^1$  располагается параллельно оси  $X_{12}$ . На фронтальной проекции точки  $A_2$  и  $B_2$  перемещаются по прямым, параллельным  $X_{12}$  и займут положение  $A_2^1 B_2^1$  (рисунок 52).

Плоско - параллельным перемещением относительно плоскости  $\Pi_2$  преобразуем АВ в горизонтально – проецирующую прямую. При этом новая фронтальная проекция прямой  $A_2^2 B_2^2$  располагается перпендикулярно  $X_{12}$ . На плоскость  $\Pi_1$  прямая проецируется в точку  $A_1^2 \equiv B_1^2$ .

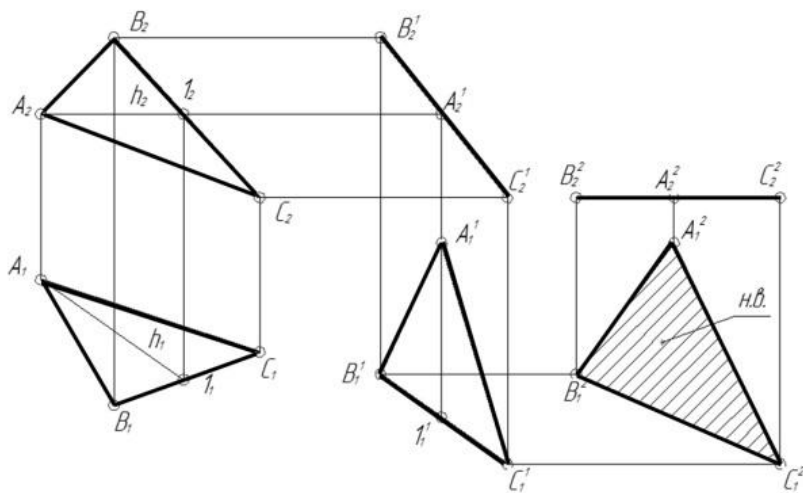


Рисунок 53

Пример 2: Определить натуральную величину плоскости  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) (рисунок 53).

В плоскости  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) проводим горизонталь  $h$ . Плоско – параллельным перемещением относительно плоскости  $\Pi_1$  преобразуем плоскость  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) во фронтально - проецирующую плоскость. При этом в новом положении горизонтальная проекция  $\triangle A_1 B_1 C_1 = \triangle A_1^1 B_1^1 C_1^1$  располагается так, что  $h_1 \perp X_{12}$ .

На  $\Pi_2$  плоскость  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) проецируется в линию  $A_2^1 B_2^1 C_2^1$ . Плоско-параллельным перемещением относительно плоскости  $\Pi_2$  преобразуем  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) в горизонтальную плоскость уровня. При этом, фронтальная проекция  $A_2^2 B_2^2 C_2^2 = A_2^1 B_2^1 C_2^1$  располагается параллельно оси  $X_{12}$ . На плоскость  $\Pi_1$  плоскость  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) проецируется в натуральную величину  $\triangle A_1^2 B_1^2 C_1^2$ .

Пример 3: Определить истинную величину двугранного угла ABCD при ребре AC (рисунок 54).

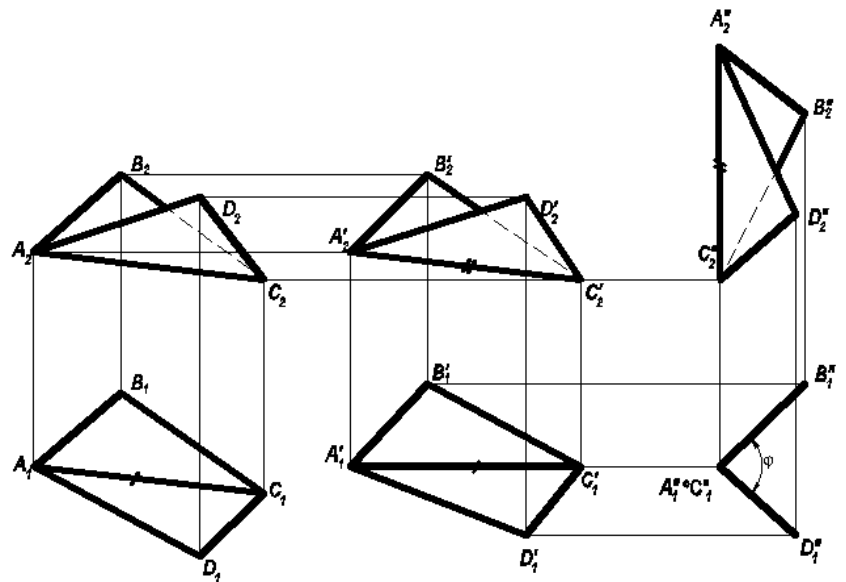


Рисунок 54

Плоско - параллельным перемещением относительно плоскости  $\Pi_1$  преобразуем ребро AC во фронталь. При этом, в новом положении горизонтальная проекция двугранного угла  $A_1^1 C_1^1 \parallel X_{12}$ .

Вторым плоско - параллельным перемещением относительно плоскости  $\Pi_2$  преобразуем ребро AC в горизонтально - проецирующую прямую. При этом, на

фронтальной проекции двугранного угла  $A_2^2 C_2^2 \perp X_{12}$ .

На горизонтальной проекции угол  $B_1^2 A_1^2 D_1^2 = \varphi$ . Получаем истинную величину двугранного угла:  $\angle B_1^2 A_1^2 D_1^2 = \varphi$ .

### 7.3. Способ вращения вокруг проецирующей прямой

При вращении фигуры вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, например  $\Pi_1$ , все точки этой фигуры в пространстве движутся по дугам окружности, центры которых находятся на оси вращения. На ту плоскость проекций ( $\Pi_1$ ), которой перпендикулярна ось вращения, каждая дуга проецируется без искажения, на другую плоскость ( $\Pi_2$ ) в виде прямой параллельной оси проекций ( $X_{12}$ ) или перпендикулярной проекции оси вращения.

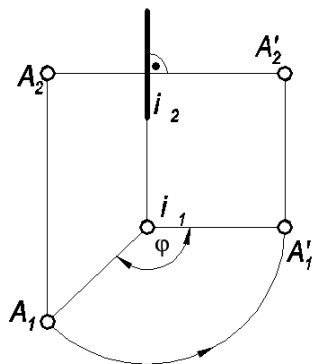


Рисунок 55

Пример 1: Повернуть точку A вокруг оси  $i$  на заданный угол  $\varphi$ .

Так как ось  $i \perp \Pi_1$ , точка  $A_1$  повернется вокруг центра  $i_1$  на угол  $\varphi$  и займет положение точки  $A_1^1$ . На фронтальной, проекции точка  $A_2$  перемещается по прямой, перпендикулярной  $i_2$  и займет положение точки  $A_2^1$  как показано на рисунке 55.

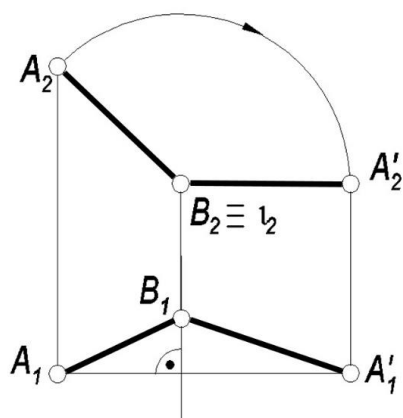


Рисунок 56

Пример 2: Определить натуральную величину отрезка АВ (смотри рисунок 53).

Через точку В проводим ось  $i \perp \Pi_2$ . Поворачиваем отрезок АВ вокруг оси до положения, параллельного плоскости  $\Pi_1$ . При этом, точка повернется вокруг центра  $i_2$  до положения точки  $A_2^1$ , при котором  $A_2^1B_2 \parallel X_{12}$ , при этом, точка  $A_1$  переместится по прямой  $A_1A_1^1 \perp i_1$ . Отрезок  $B_1A_1^1 = AB$ , т.к. прямая АВ стала горизонталью как показано на рисунке 56.

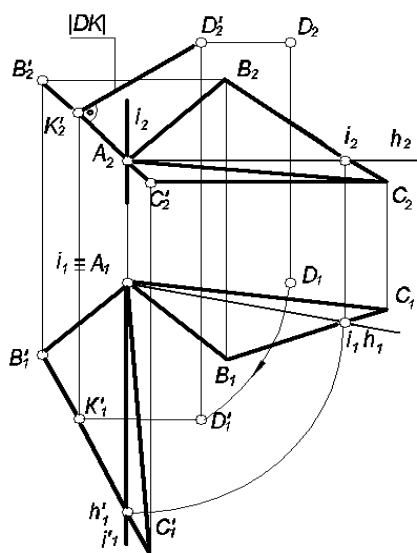


Рисунок 57

Пример 3: Определить расстояние от точки D до плоскости  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) (смотри на рисунок 53).

В плоскости  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) проводим горизонталь  $h$ . Через точку А проводим ось  $i \perp \Pi_1$ . Поворачиваем систему вокруг оси  $i$  до положения, при котором  $h \perp \Pi_2$ . При этом  $h_1 \perp X_{12}$ . На  $\Pi_2$  плоскость  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) проецируется в линию ( $B_2^1A_2^1C_2^1$ ). Перпендикуляр ( $D_2^1K_2$ ), опущенный на линию ( $B_2^1A_2^1C_2^1$ ) и есть расстояние от точки D до плоскости  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) как показано на рисунке 57.

#### 7.4. Способ вращения вокруг линии уровня

Способ применяется для определения натуральной величины различных плоских фигур.

При вращении плоской фигуры вокруг линии уровня все точки этой фигуры в пространстве движутся по дугам окружности, центры которых находятся на оси вращения. На ту плоскость проекций, которой параллельна линия уровня, эти дуги проецируются в виде прямых, перпендикулярных проекции оси вращения. Поскольку поворот фигуры производится до положения параллельности плоскости проекций задача сводится к определению проекций и натуральной величины радиусов вращения отдельных точек плоской фигуры.

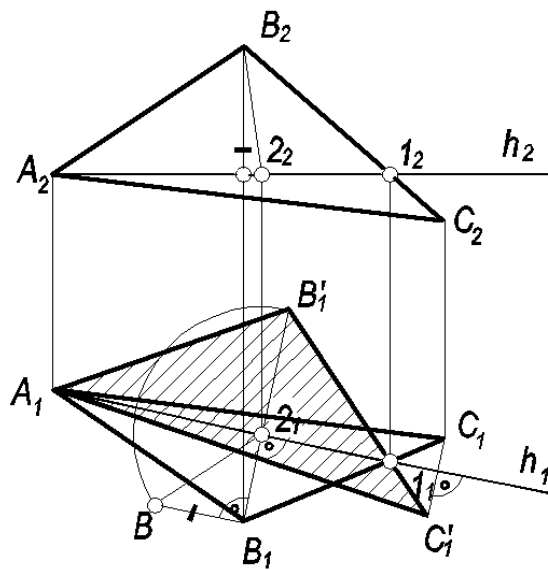


Рисунок 58

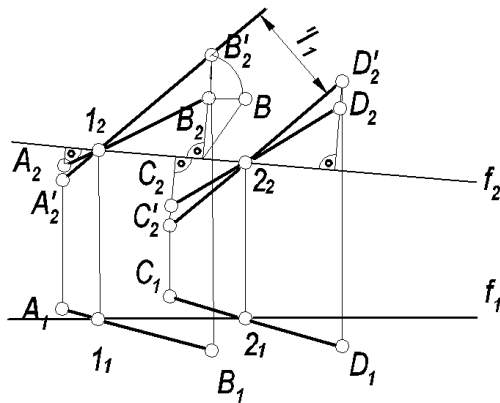


Рисунок 59

Пример 1: Определить натуральную величину плоскости  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) (рисунок 58).

В плоскости  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) проводим линию уровня – горизонталь  $h$ . При вращении фигуры вокруг горизонтали  $h$  точки  $B_1$  и  $C_1$  двигаются по прямым, перпендикулярным  $h_1$ . Определяем натуральную величину радиуса вращения точки  $B$ :  $R_B = B_2B_1$ , с помощью которого находим точку  $B_1^1$ . Проведя прямую  $B_1^11_1$  до пересечения с горизонтальной проекцией движения точки  $C$ , находим точку  $C_1^1$ .

$\triangle A_1^1B_1^1C_1^1 = \alpha$  ( $\triangle ABC$ ), т.к. плоскость  $\alpha$ , заданная  $\triangle ABC$ , параллельна плоскости  $\Pi_1$ .

Пример 2: Определить расстояние между двумя параллельными прямыми  $AB$  и  $CD$  (рис. 59).

В пл. ( $AB \parallel CD$ ) проводим фронталь  $f$ .

Определяем траектории движения точек  $A, B, C$  и  $D$  на фр. пл. проекций. Находим натуральную величину радиуса вращения  $(.)B$ , и положение прямых  $A'_2B'_2 \parallel C'_2D'_2$ , расстояние между которыми и есть искомая величина  $|l|$ .

## 8. Многогранники и кривые поверхности

### Общее понятие о многогранниках и кривых поверхностях

Многогранником называют тело, поверхность которого состоит из взаимно пересекающихся плоскостей. Основными элементами всякого многогранника являются: грани, ребра и вершины (рисунок 60). Из многогранников наибольшее распространение получили пирамиды и призмы. Пирамида – многогранник, боковые грани и ребра которого пересекаются в одной точке, называемой вершиной.

Призма – многогранник, боковые грани и ребра которого перпендикулярны к пл.  $\sigma$ , называемой плоскостью нормального сечения, или боковые ребра которого параллельны между собой.

Если точка находится на поверхности многогранника, то ее проекции следует искать на прямой, проходящей через эту точку и находящейся на соответствующей грани многогранника (рисунок 61).

Криволинейной поверхностью называется поверхность, образованная при движении прямой или кривой линии в пространстве по определенному закону (рисунок 62).

Линия, производящая поверхность, называется образующей. Линия, по которой движется образующая, называется направляющей.

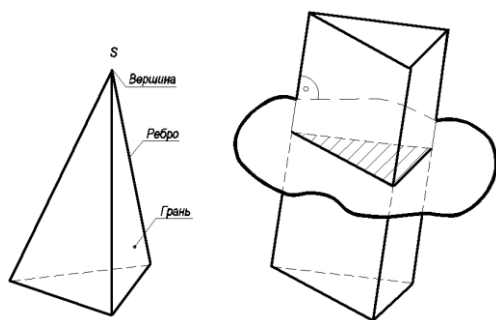


Рисунок 60

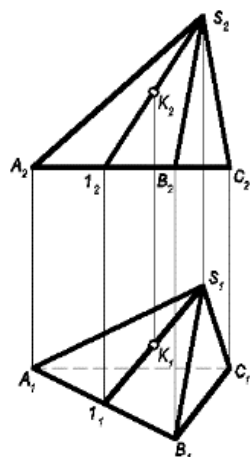


Рисунок 61

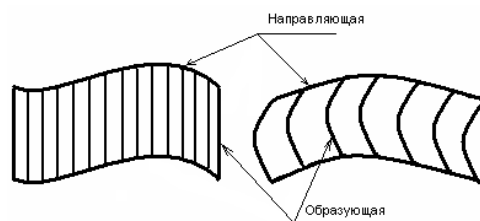


Рисунок 62

Поверхности разделяются на линейчатые – образующая прямая линия, и нелinearчатые – образующая кривая линия.

Из линейчатых поверхностей получили наибольшее распространение цилиндрические и конические поверхности, из нелinearчатых – поверхности вращения. Если точка находится на поверхности тела, то ее проекции следует искать на проекциях линии (образующей), принадлежащей поверхности данного тела как показано на рисунке 63.

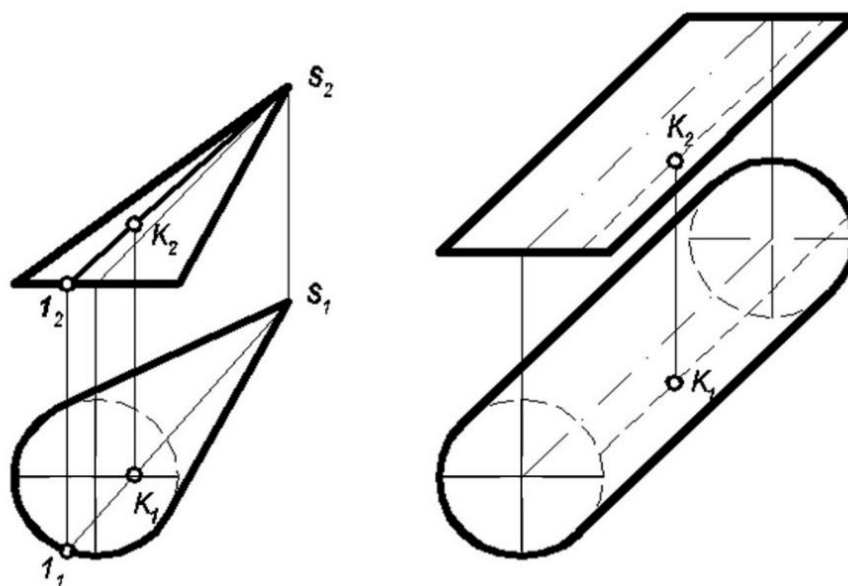


Рисунок 63

Особую группу криволинейных поверхностей составляют поверхности вращения, полученные при вращении образующей вокруг какой-либо оси (рисунок 64).



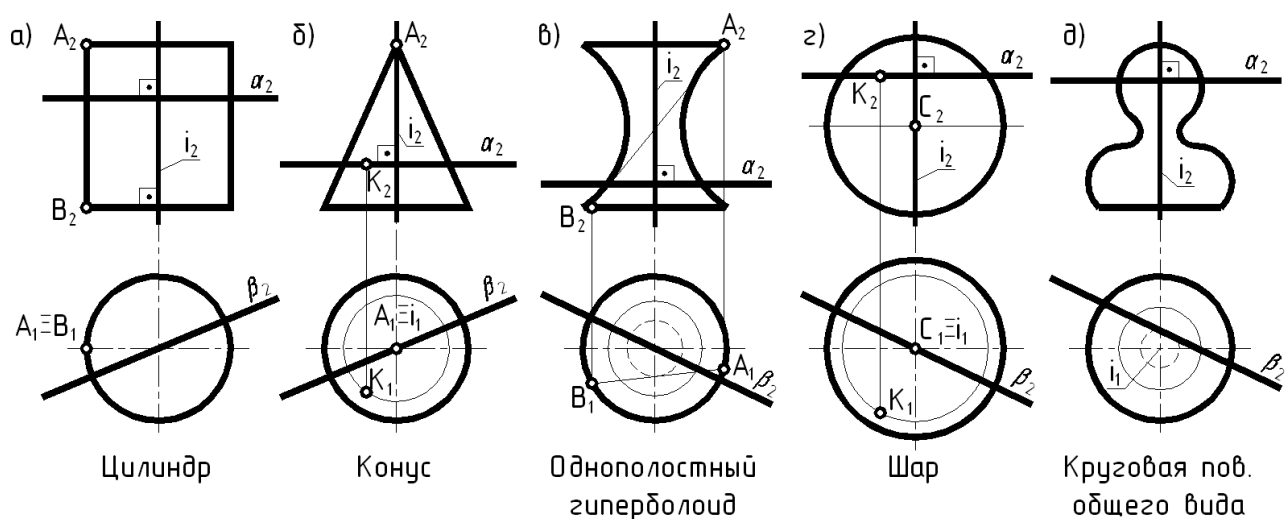


Рисунок 64

При сечении поверхности вращения плоскостью  $\alpha \perp$  оси вращения в сечении получается *окружность - параллель*. Наименьшая параллель называется *горлом*, наибольшая - *экватором*.

При сечении поверхности вращения плоскостью  $\beta$ , проходящей через ось  $i$  в сечении получается фигура, называемая *меридианом*. *Меридиан*, параллельный плоскости  $\Pi_2$ , называется *главным*.

## 9. Пересечение пространственных тел плоскостью

При сечении пространственного тела плоскостью в сечение получается плоская фигура, точки которой определяются путем последовательного построения точек пересечения линий поверхности тела с данной плоскостью.

### *Пересечение пространственных тел проецирующей плоскостью*

Так как  $\alpha$  – фронтально - проецирующая плоскость, фронтальная проекция линии пересечения совпадает со следом плоскости ( $1_2 2_2 3_2 \equiv \alpha_2$ ), горизонтальная проекция линии пересечения ( $\Delta 1_1 2_1 3_1$ ) находится построением (рисунок 65).

Натуральная величина фигуры сечения определяется одним из способов преобразования чертежа (например, плоско - параллельным перемещением). Так как  $\beta$  - горизонтально - проецирующая плоскость, горизонтальная проекция фигуры сечения совпадает со следом плоскости ( $1_1 2_1 3_1 \equiv \beta_1$ ). Фронтальная проекция фигуры сечения находится построением, для чего используется взаимная принадлежность точек фигуры сечения образующим поверхности цилиндра (рисунок 66).

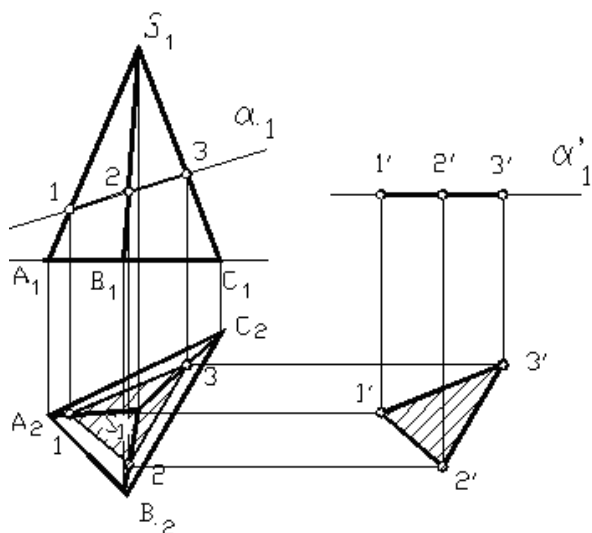


Рисунок 65

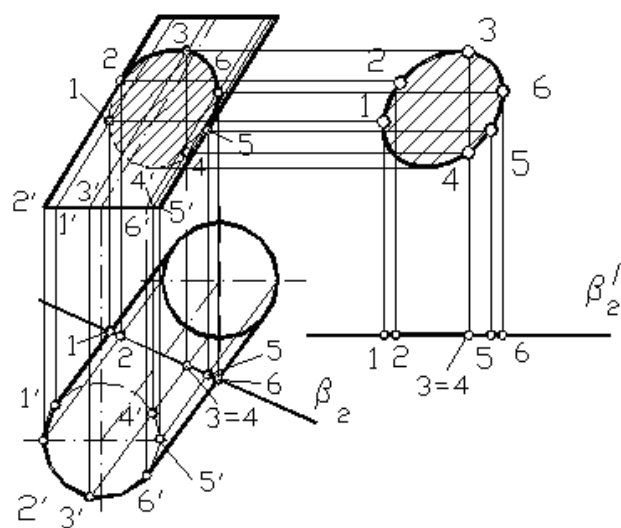


Рисунок 66

### Пересечение пространственных тел плоскостью общего положения

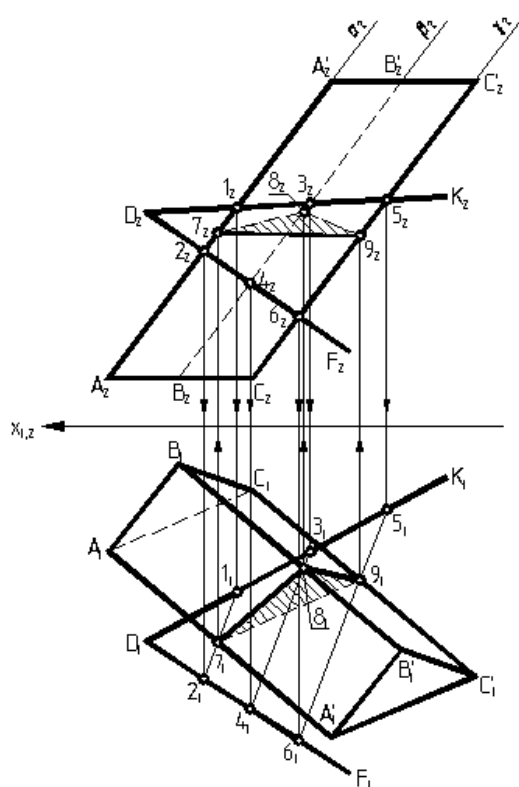


Рисунок 67

Фигура сечения определяется путем последовательного построения точек пересечения плоскости с линиями (образующими, параллелями) на поверхности тела или же путем сведения задачи к предыдущему случаю, для чего предварительно делают преобразование чертежа.

При пересечении наклонной призмы плоскостью общего положения ( $DK \cap DF$ ) фигура сечения ( $\Delta I \cap II \cap III$ ) определяется путем последовательного построения точек пересечения боковых ребер  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  с заданной плоскостью. Для этого ребра последовательно заключаются в проецирующие плоскости (например: в фронтально-проецирующие плоскости  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ ), как показано на рисунке 67.

Пример: Пересечение поверхности конуса плоскостью общего положения ( $\Delta ABC$ )).

Заменой пл.  $\Pi_2$  на  $\Pi_4$  задача сведена к случаю пересечения наклонного конуса с фронтально-проецирующей плоскостью ( $\alpha_4$ ).

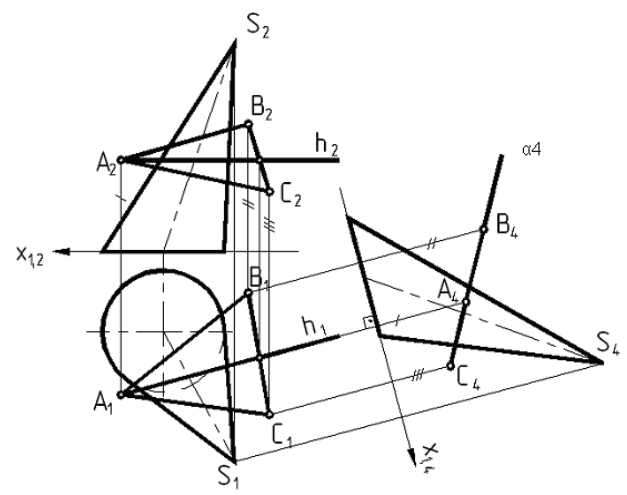


Рисунок 68

При этом в пл.  $\Delta ABC$  проведена горизонталь  $h$  и пл.  $P_4$  взята перпендикулярно ей. На чертеже ось  $X_{14} \perp h_1$  (рисунок 68).

### **Сечение конуса вращения плоскостью**

При пересечении поверхности конуса вращения плоскостью (рисунок 66) могут получиться следующие сечения: две образующие, если плоскость  $\alpha$  проходит через вершину  $S$ ; окружность ( $X^2 + Y^2 = R^2$ ), если плоскость  $\beta$  проходит перпендикулярно оси вращения, эллипс ( $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ), если плоскость  $\gamma$  пересекает все образующие; парабола ( $y^2 = 2px$ ), если плоскость  $\delta$  проходит параллельно одной образующей; гипербола ( $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ), если плоскость  $\lambda$  проходит параллельно двум образующим.

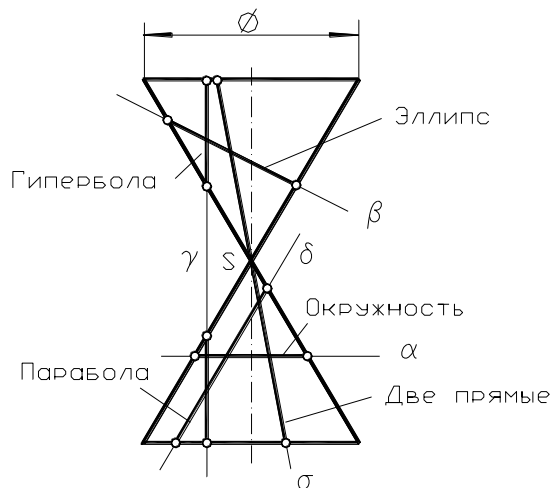


Рисунок 69

**Эллипс** - секущая плоскость пересекает все образующие и с осью вращения образует острый угол.

**Окружность** - секущая плоскость пересекает все образующие и перпендикулярна к оси вращения конуса.

**Точка** - секущая плоскость пересекает все образующие в месте их взаимного пересечения - в вершине.

**Две прямые** - секущая плоскость проходит через вершину и чрез две пересекающиеся

образующие.

**Сдвоенная прямая** - секущая плоскость содержит в себе всего одну образующую.

Такая секущая плоскость касается двух плоскостей конуса разными сторонами. Граница перехода сторон касания располагается в вершине. От нее как бы отходят две полупрямые.

**Гипербола** - секущая плоскость параллельная двум образующим.

**Парабола** - секущая плоскость параллельная одной образующей.

Пример: Построить проекции фигуры сечения конуса вращения плоскостью  $\gamma$  (рисунок 70).

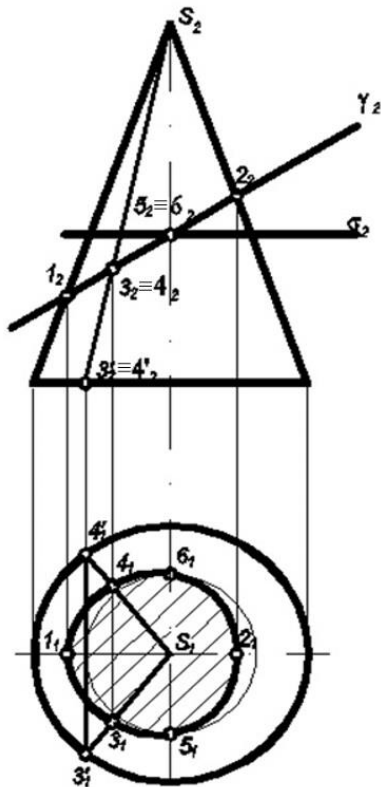


Рисунок 70

Проекции точек 1 и 2 находятся непосредственно как лежащие на очерковых образующих.

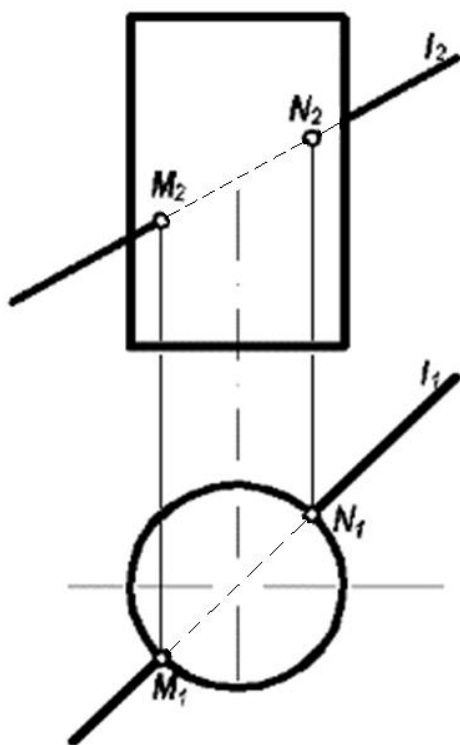
Проекции точек 3 и 4 строятся с помощью образующих  $S_3$  и  $S_4$ . Проекции точек 5 и 6 находятся с помощью параллели, расположенной в плоскости  $\sigma$ , перпендикулярной оси вращения.

### ***Пересечение пространственных тел с прямой линией***

Прямая, пересекаясь с поверхностью пространственного тела имеет с ним, как правило, две общие точки.

***Поверхность занимает проецирующее положение, а прямая – общее положение***

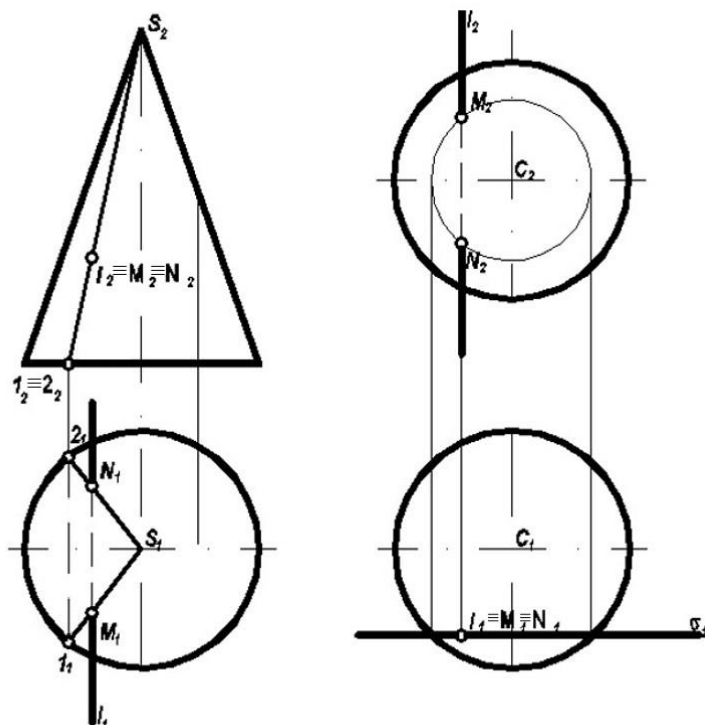
Поскольку поверхность цилиндра является горизонтально-проецирующей, горизонтальные проекции точек пересечения ( $M_1$ ,  $N_1$ ) находятся непосредственно на пересечении  $l_1$  с проекцией основания.



Фронтальные проекции искомых точек ( $M_2$ ,  $N_2$ ) находятся построением на  $l_2$  (рисунок 71).

Рисунок 71

### *Прямая занимает проецирующее положение*



Если прямая является проецирующей прямой (рисунок 72), то на ту плоскость проекций, которой перпендикулярна прямая, точки пересечения прямой с поверхностью тела проецируются в точку вместе с данной прямой. Другие проекции точек определяются с помощью линий, лежащих на поверхности пространственного тела и проходящих через искомые точки встречи ( $M$ ,  $N$ ).

Рисунок 72

### ***Прямая и поверхность тела занимают общее положение***

В общем случае точки пересечения прямой с поверхностью пространственного тела определяются следующим образом:

1. Прямая заключается во вспомогательную плоскость.
2. Определяется фигура сечения поверхности тела со вспомогательной плоскостью.
3. Находятся искомые точки встречи на пересечении заданной прямой с построенной фигурой сечения.

Вспомогательная плоскость выбирается таким образом, чтобы фигура сечения поверхности тела этой плоскостью получалась простейшей для построения.

### ***Пересечение прямой с поверхностью многогранников***

При пересечении прямой с поверхностью многогранника (рисунок 73), прямая  $l$  заключается в проецирующую плоскость (например: во фронтально - проецирующую  $\beta_2 \equiv l_2$ ). Определяются проекции фигуры сечения ( $\Delta 123$ ). На пересечении прямой  $l$  с плоскостью ( $\Delta 1_1 2_1 3_1$ ), находятся точки  $M_1$  и  $N_1$  - горизонтальные проекции искомых точек, по которым на  $l_2$  находятся точки  $M_2$  и  $N_2$  - фронтальные проекции искомых точек.

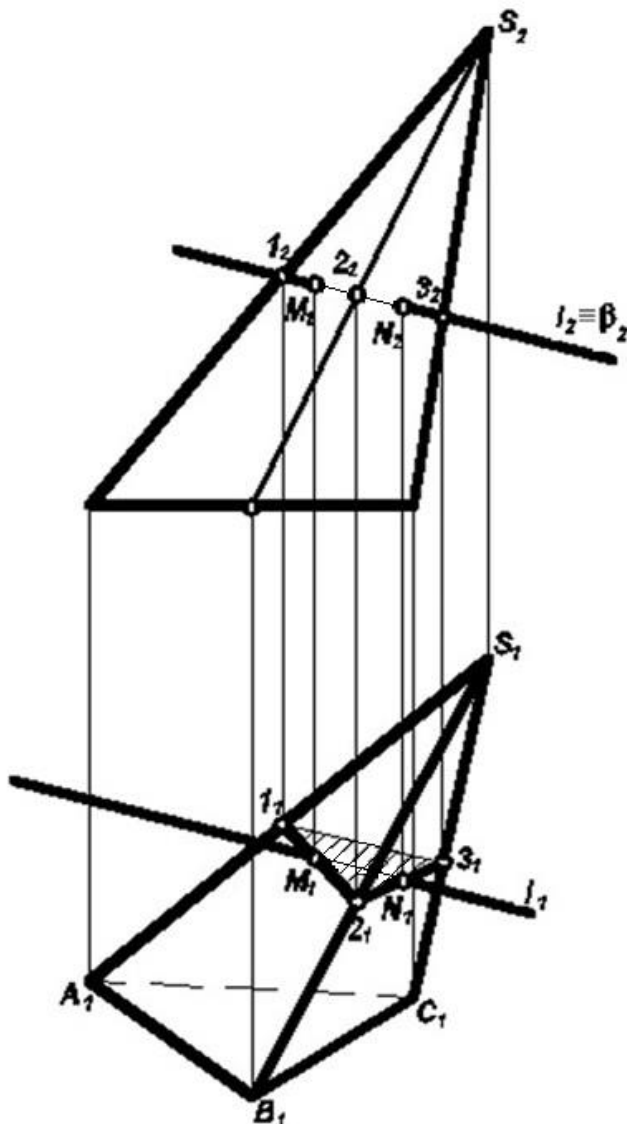
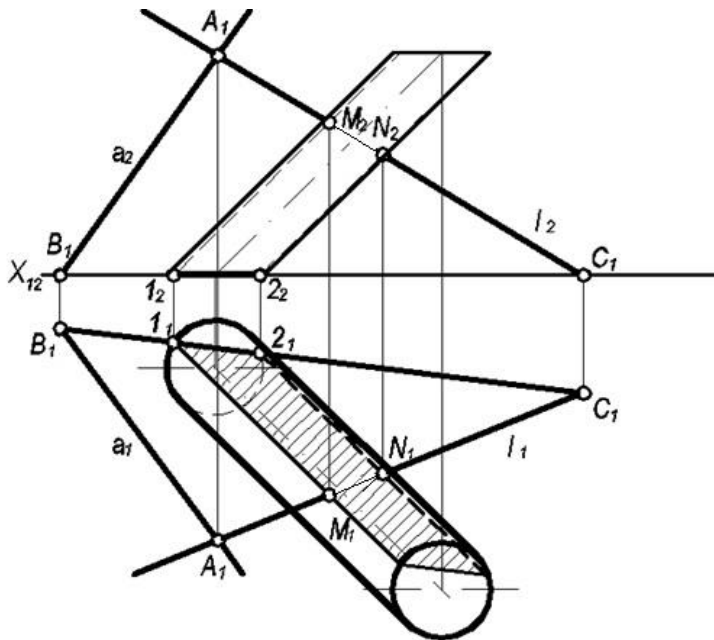


Рисунок 73

### Пересечение прямой с поверхностью наклонного цилиндра (призмы)

При пересечении прямой с поверхностью наклонного цилиндра (призмы) (рисунок 74) вспомогательная плоскость задается двумя прямыми: данной  $l$  и пересекающей ее  $a$ , параллельной образующим цилиндра.



Находится линия пересечения вспомогательной плоскости с плоскостью  $\Pi_1$ , в которой расположено основание цилиндра. На пересечении следа  $BC$  с основанием цилиндра лежат опорные точки  $1_1$  и  $2_1$  параллелограмма сечения, на пересечении которого с данной прямой  $l$  и находятся искомые точки пересечения  $M_1$  и  $N_1$ , фронтальные проекции которых  $2$  и  $N_2$  лежат на пересечении вертикальной линии связи с фронтальной проекции прямой  $l_2$

Рисунок 74

### Пересечение прямой с поверхностью конуса (пирамиды)

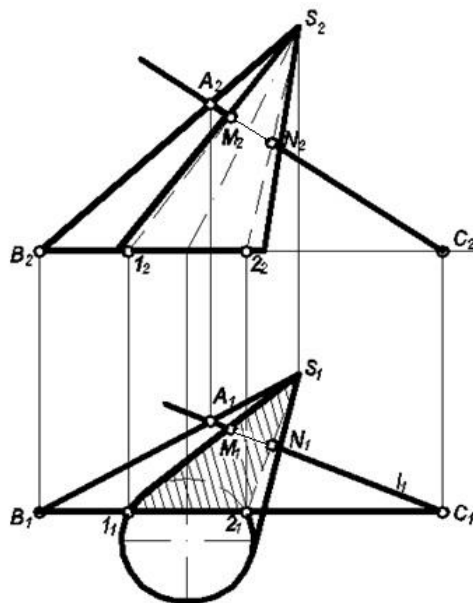


Рисунок 75

При пересечении прямой с поверхностью конуса (пирамиды) (рисунок 75) вспомогательная плоскость задается двумя прямыми: заданной  $l$  и пересекающей ее  $SA$ , проходящей через вершину конуса.

Находится линия  $BC$  пересечения вспомогательной плоскости с плоскостью  $\Pi_1$ , в которой расположено основание конуса. На пересечении следа  $BC$  с основанием конуса находятся опорные точки  $1$  и  $2$  треугольника сечения, на пересечении которого с данной прямой  $l$  лежат искомые точки  $M$  и  $N$ .

### Пересечение прямой с поверхностью шара

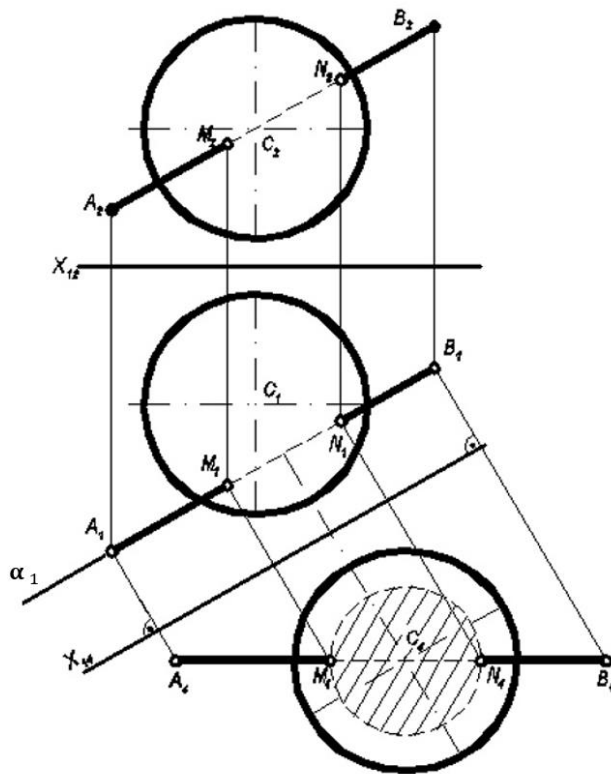


Рисунок 76

При определении точек встречи прямой с поверхностью шара (рисунок 76) преобразуем прямую (AB) в линию уровня одним из методов преобразования чертежа (например: заменой плоскости  $\Pi_2$  на плоскость  $\Pi_4$  преобразуем AB во фронталь).

Заключаем прямую AB в горизонтально - проецирующую плоскость  $\alpha$ . В сечении получается круг радиуса R, который на новую плоскость  $\Pi_4$  проецируется без искажения. На пересечении этого круга с проекцией прямой  $A_4B_4$  находятся точки  $M_4$  и  $N_4$  – проекции искомых точек встречи прямой AB на плоскость  $\Pi_4$ , по которым с помощью линий связи находим  $M_1$  и  $N_1$  – горизонтальные и  $M_2$  и  $N_2$  – фронтальные проекции искомых точек пересечения.

## 10. Взаимное пересечение пространственных тел

Два пространственных тела могут пересекаться по одной, двум или более линиям пересечения, определение которых сводится к построению точек, общих для поверхностей обоих пересекающихся тел.

Эта задача может решаться путем последовательного построения точек пересечения ребер, образующих или других линий поверхности одного тела с поверхностью другого и наоборот, или путем применения различных вспомогательных средств, к которым относятся вспомогательные плоскости или поверхности. Выбор вспомогательного средства зависит от условий каждой конкретной задачи.

### Способ вспомогательных проецирующих плоскостей

Способ вспомогательных проецирующих плоскостей применяется в том случае, когда при пересечении поверхностей обоих тел в сечениях получают простые для построения фигуры (прямые линии и т.п.)

Пример 1: Построить линии пересечения прямой ( $ABCA^1B^1C^1$ ) и наклонной ( $DKFD'K'F'$ ) призмы (рисунок 77).

Линия пересечения двух многогранников, называемая в технике линией перехода, представляет собой пространственную ломаную линию, которая может распадаться на две и более части. Одна линия получается в результате неполного врезания одной поверхности в другую. Две линии образуются, когда один многогранник целиком проходит внутри другого.



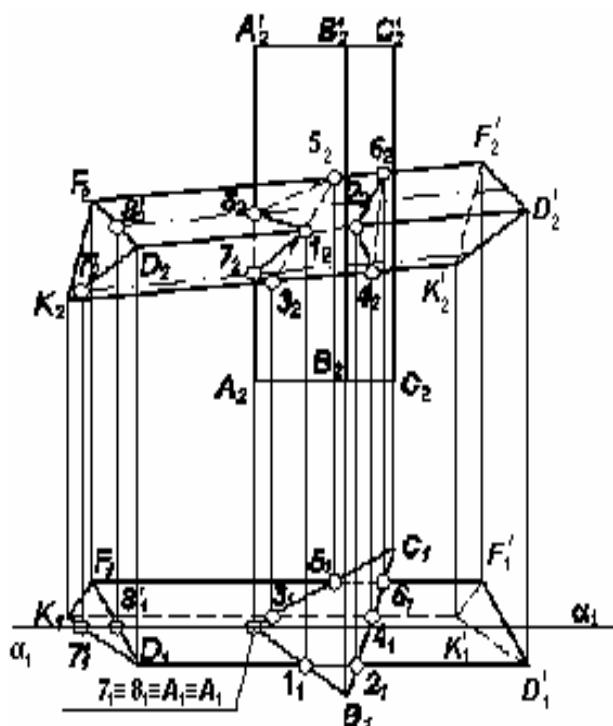


Рисунок 77

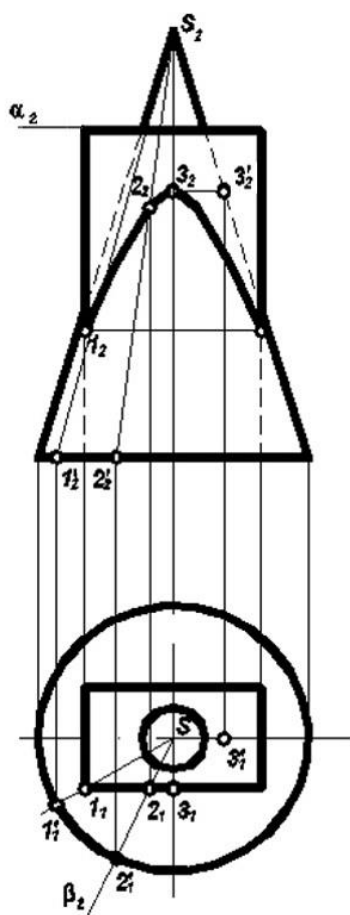


Рисунок 78

Линия пересечения многогранников представляет собой пространственную или плоскую ломаную линию, вершинами которой являются точки пересечения ребер одного многогранника с гранями и ребрами другого.

Отрезки ломаной являются линиями взаимного пересечения граней обоих многогранников.

Точки 1,2,3,4,5 и 6 пересечения ребер прямой призмы с гранями наклонной определяются непосредственно, т.к. боковые грани прямой призмы являются горизонтально — проецирующими плоскостями. Для определения точек 7 и 8 пересечения ребра  $AA^1$  с гранями наклонной призмы используется вспомогательная горизонтальная проекция плоскости  $\alpha$ , проходящей через ребро  $AA^1$  параллельно боковым ребрам наклонной призмы.

Последовательность соединения точек, принадлежащих линиям пересечения, устанавливается путем обхода поверхности наклонной призмы по граням в пределах каждой зоны пересечения. Соединение точек на проекциях производится с учетом их видимости.

Линия пересечения I: 1-7-3-5-8-1

Линия пересечения II: 2-4-6-2

Пример 2: Построить линии пересечения прямого кругового конуса с прямой призмой (рисунок 78).

Для определения линии пересечения (окружности) верхнего основания призмы с конусом используем горизонтальную плоскость уровня  $\alpha$ . Для определения точек линий пересечения (гипербол) боковых граней призмы с поверхностью конуса используем образующие ( $S1$  для точки 1), параллели (для точки 3) или горизонтально - проецирующие плоскости (например:  $\beta$  для точки 2), проходящие через вершину конуса  $S$ .

Пример 3: Построить линию пересечения прямого кругового конуса с шаром.

Рассмотрим пример построения линии пересечения конуса вращения и поверхности шара (рисунок 79). Ни одна из заданных пересекающихся поверхностей, не является проецирующей. Поэтому, построения выполняют как на горизонтальной, так и на фронтальной проекциях. Для решения задачи воспользуемся вспомогательными плоскостями посредниками. Воспользуемся горизонтальными плоскостями уровня, которые будут перпендикулярными осям вращения заданных поверхностей и должны пересекать их по окружностям параллелям. В каждой секущей плоскости будет две параллели (для каждой поверхности) и там, где они пересекаются, будут общие точки заданных поверхностей.

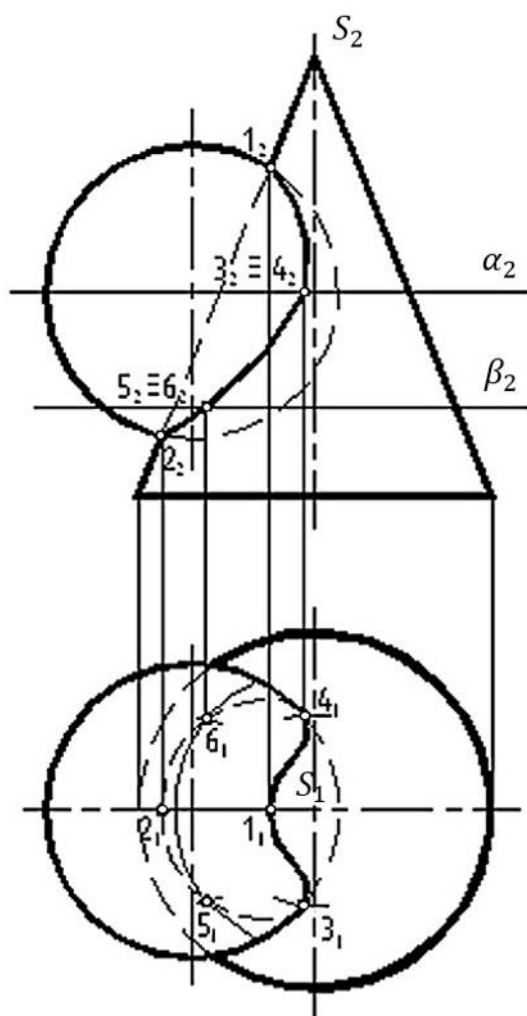


Рисунок 79

Опорными являются точки:

- 1 – граница видимости на фронтальной проекции и вершина линии пересечения;
- 3 и 4 – точки излома.

Наиболее высокая - 1 и низкая - 2 точки сечения определяются непосредственно на пересечении главных меридианов. Для определения остальных точек линии пересечения используются горизонтальные плоскости уровня  $\alpha$ ,  $\beta$  и т.д., которые рассекают оба тела по параллелям, которые на пл.  $\Pi_1$  проецируются без искажения в виде соответствующей окружности. На пересечении параллелей (радиусы  $R$  и  $r$ ), расположенных в одной вспомогательной плоскости находятся точки (3 и 4, 5 и 6 и т.д.), принадлежащие искомой линии пересечения. Соединение точек на проекциях производится последовательно с учетом их видимости.

**Метод вспомогательных concentric сфер**

Применяется в том случае, когда выдерживаются следующие условия (рисунок 80).

- 1) Оба пересекающихся тела являются телами вращения.
- 2) Оси вращения обоих тел пересекаются.
- 3) Оси вращения параллельны какой-либо пл. проекций.

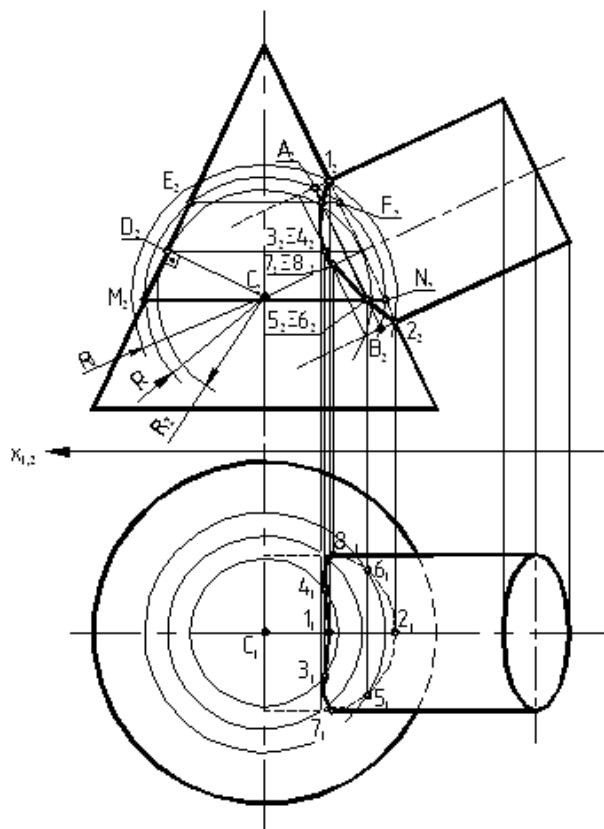


Рисунок 80

Наиболее высокая 1 и наиболее низкая 2 точки сечения определяются непосредственно на пересечении главных меридианов.

Для определения проекций остальных точек используются вспомогательные концентрические сферы с центром в  $(\cdot)C$ . Радиус максимальной сферы  $R_1 = C_1 1_2$ , радиус минимальной сферы  $R_2 = C_2 D_2$  (это радиус сферы, вписанной в наибольшее из тел, в данном случае - в конус).

Радиус остальных вспомогательных сфер берется в пределах  $R_2 \leq R \leq R_1$ .

Сфера радиусом  $R$  пересекает цилиндр по одной окружности, конус по двум окружностям, которые на пл.  $\Pi_2$  проецируются в виде прямых, перпендикулярных фронтальным проекциям осей цилиндра и конуса; соответственно,  $A_2 B_2$  и  $E_2 F_2$ ,  $M_2 N_2$ . На пересечении этих линий находятся фр. проекции точек  $5_2 \equiv 6_2$  и  $7_2 \equiv 8_2$ , принадлежащих линии пересечения. По ним известными способами определяются горизонтальные проекции точек  $5_1$ ,  $6_1$ ,  $7_1$  и  $8_1$ . Соединение точек на проекциях производится с учетом их видимости.

## 11. Развертывание поверхностей пространственных тел

Развертыванием называют процесс совмещения поверхности пространственного тела с плоскостью раскроя.

Фигура, получающаяся на плоскости, раскроя после совмещения с ней всех элементов поверхности тела, называют разверткой.

Поскольку на пл. раскроя все элементы поверхности тела проецируются без искажения, процессу построения развертки предшествует процесс определения натуральной величины этих элементов поверхности тела, заданной на чертеже.

К развертываемым поверхностям относятся: поверхности всех многогранников и некоторые линейчатые криволинейные поверхности - цилиндрические, конические и поверхности с ребром возврата (торсы).

Остальные поверхности относятся к неразвертываемым и для них строятся приближенные развертки.

Признаком развертываемости криволинейной поверхности служит возможность проведения на поверхности двух смежных параллельных или пересекающихся прямолинейных образующих, когда расстояние между ними бесконечно мало.

## 11.1. Построение разверток пирамид и конусов

Построение разверток пирамид и конусов производится в следующей последовательности:

- 1) Определяется натуральная величина боковых ребер или образующих;
- 2) Определяется натуральная величина фигуры основания;
- 3) Строится развертка боковой поверхности тела как ряд треугольников по 3-м известным сторонам.

Пример 1: Построить развертку поверхности пирамиды  $SABC$  (рисунок 81).

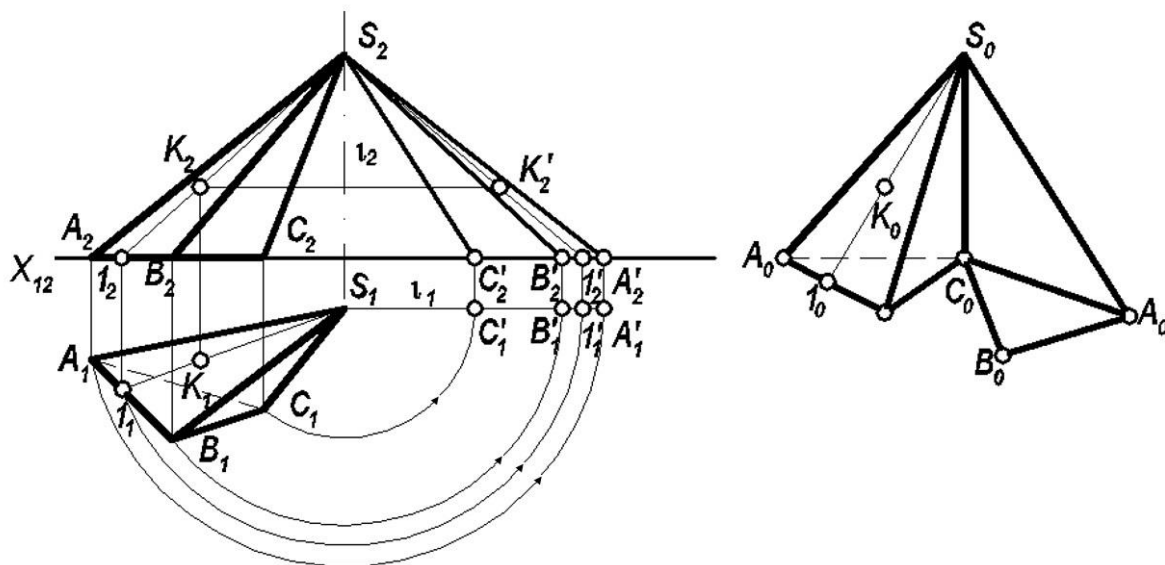


Рисунок 81

Натуральная величина боковых ребер определяется методом вращения вокруг оси  $i \perp \Pi_1$  и проходящей через вершину  $S$ . Натуральная величина основания имеется на гор. проекции так как  $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ .

Развертка поверхности пирамиды строится на плоскости раскроя как ряд треугольников по 3-м известным сторонам. Для определения на развертке точки  $K$ , расположенной на поверхности пирамиды, в соответствующей грани через эту точку проводится произвольная прямая  $S_1$ , находится натуральная величина этой линии и положение ее на развертке. На этой прямой  $S_0I_0$  и находится точка  $K_0$ .

Пример 2: Построить развертку боковой поверхности наклонного конуса (рисунок 82).

Развертка боковой поверхности наклонного конуса строится так же, как и развертка  $n$ -гранной вписанной в него пирамиды.

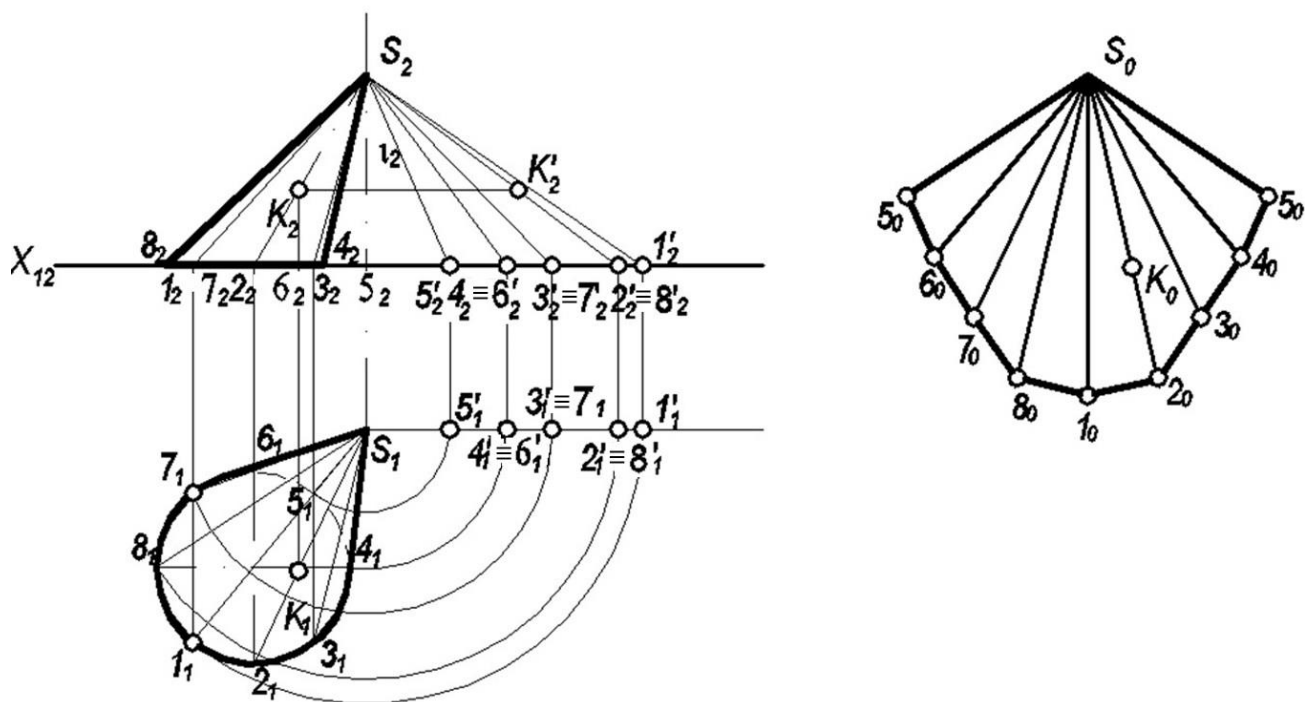


Рисунок 82

Пример 3: Построить развертку боковой поверхности прямого кругового конуса (рисунок 83).

Развертка боковой поверхности прямого кругового конуса представляет собой круговой сектор, описанный радиусом  $S_0A_0=l$ , равном длине образующей конуса, опирающегося на дугу  $A_0A_0=2\pi R$ , и угол при вершине  $\alpha=360^\circ R/l$ .

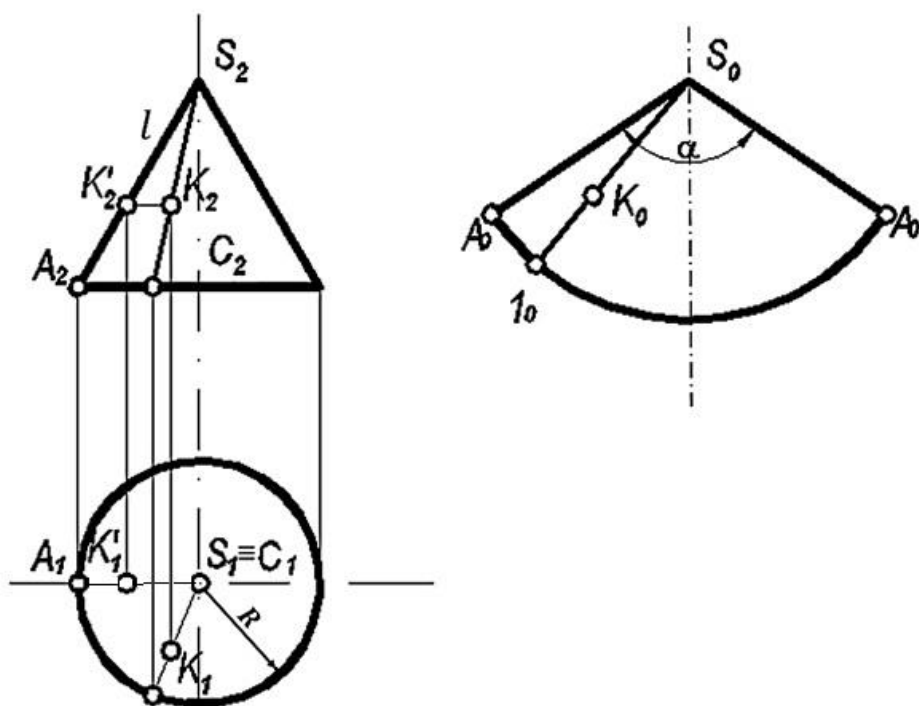


Рисунок 83

## 11.2. Построение разверток призм и цилиндров

Построение разверток боковой поверхности призм и цилиндров может производиться методом перекатывания или методом нормального сечения. Оба метода с одинаковым успехом могут применяться для построения разверток призм и цилиндров.

### Метод перекатывания

Рассмотрим метод перекатывания на примере построения развертки боковой поверхности наклонной призмы (рисунок 84).

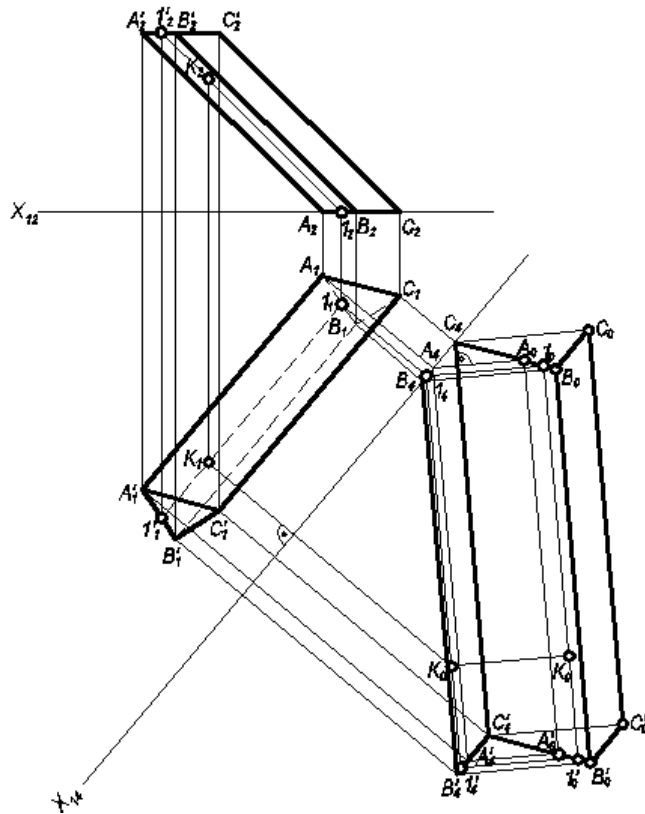


Рисунок 84

Заменой пл.  $\Pi_2$  на  $\Pi_4$  определяем натуральную величину боковых ребер призмы. При этом ось  $X_{14} \parallel A_1A_1'$  ( $B_1B_1'$  или  $C_1C_1'$ ). За плоскость раскроя принимаем плоскость проходящую через ребро  $CC$  параллельно пл.  $\Pi_4$ . Перекатываем по плоскости раскроя призму, последовательно совмещая с ней грани призмы. При этом траектории движения точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  проецируются на пл.  $\Pi_4$  в виде прямых  $A_4A_0$ ,  $B_4B_0$ ,  $C_4C_0$  и т.д.  $\perp C_4C_4$ .

Совмещенное положение вершин  $A_0$ ,  $A_0'$ ,  $B_0$ ,  $B_0'$  и т.д. находим с помощью отрезков  $A_0C_4 = A_1C_1$ ,  $A_0B_0 = A_1B_1$  и т.д.

Положение точки  $K$  на развертке находится с помощью прямой  $11'$ , расположенной в грани  $ABB'A'$  и проходящей параллельно боковым ребрам призмы.

### Метод нормального сечения

Рассмотрим на примере построения разверток прямого и наклонного цилиндров.

Пример 1\*: Построить развертку боковой поверхности прямого цилиндра (рисунок 85).

Делим основание и боковую поверхность цилиндра на  $n$  равных частей (например, на 8) и проводим образующие. Совмещаем с плоскостью раскроя линию нижнего основания ( $1_0-1_0$ ), равную  $\pi d$  и делим ее на те же  $n$  частей. Через точки  $1_0$ ,  $2_0$ ,  $3_0$  и т.д. проводим прямые  $1-1_0$  и откладываем на них натуральную величину образующих  $1_01'_0$ ,  $2_02'_0$  и т.д. Соединяем точки верхнего основания плавной прямой.

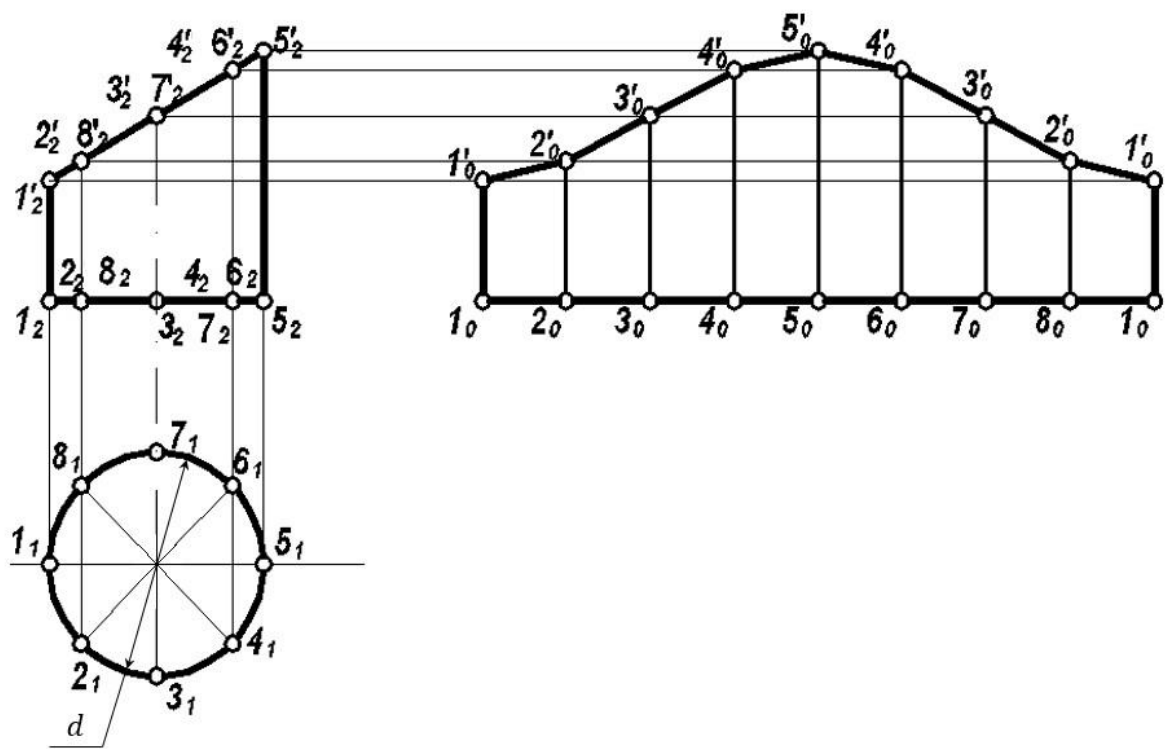


Рисунок 85

Пример 2: Построить развертку боковой поверхности наклонного цилиндра (рисунок 86).

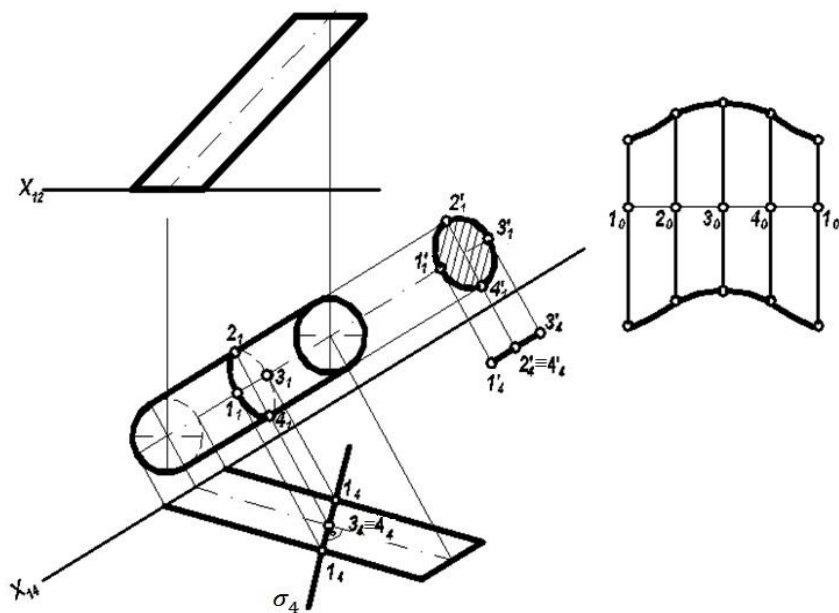


Рисунок 86

Определяем натуральную величину образующих цилиндра путем замены плоскости  $\Pi_2$  на плоскость  $\Pi_4$ , при этом  $X_{14}$  параллельна горизонтальной проекции оси цилиндра. Находим проекции и натуральную величину фигуры нормального сечения поверхности цилиндра плоскостью  $\sigma$ . Совмещаем с плоскостью раскроя линию нормального сечения ( $1_0-1_0$ ) и делим ее на  $n$  – частей. Через точки  $1_0, 2_0, 3_0$  и т.д. проводим прямые  $\perp (1_0-1_0)$  на которых от линии нормального сечения откладываем отрезки образующих от плоскости нормального сечения до верхнего и нижнего оснований. Это отрезки ( $1_4M$ ) и ( $1_4N$ ), которые берутся с проекции цилиндра на плоскость  $\Pi_4$ . Полученные точки, принадлежащие верхнему и нижнему основаниям, на развертке соединяем плавными кривыми.

### 11.3. Построение приближенных разверток

Приближенные развертки строятся для тел, имеющих криволинейную неразвертываемую поверхность. Для этого поверхность тела заменяется близкой по площади многогранной или криволинейной развертываемой поверхностью.

#### Метод многогранников

Криволинейная неразвертываемая поверхность заданного тела заменяется поверхностью вписанного или описанного многогранника и строится развертка поверхности многогранника.

Например: Построить развертку усеченного деформированного конуса (рисунок 87).

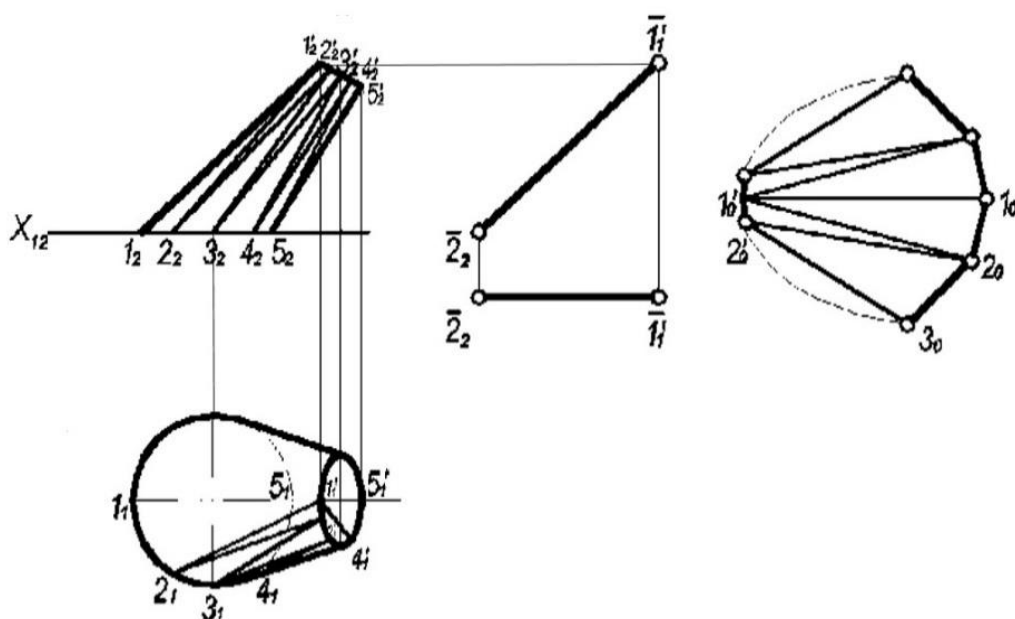


Рисунок 87

Верхнее и нижнее основания разбиваются на  $n$  -частей и поверхность тела заменяется  $2n$  - гранной поверхностью. Определяется натуральная величина всех ребер и известным способом строится развертка поверхности многогранника.

#### Метод цилиндрических и конических поверхностей

Криволинейная неразвертываемая поверхность тела делится на некоторое количество частей, каждая из которых заменяется участком цилиндрической или конической развертываемой поверхностью.



Например: Построить приближенную развертку поверхности шара (рисунок 88).

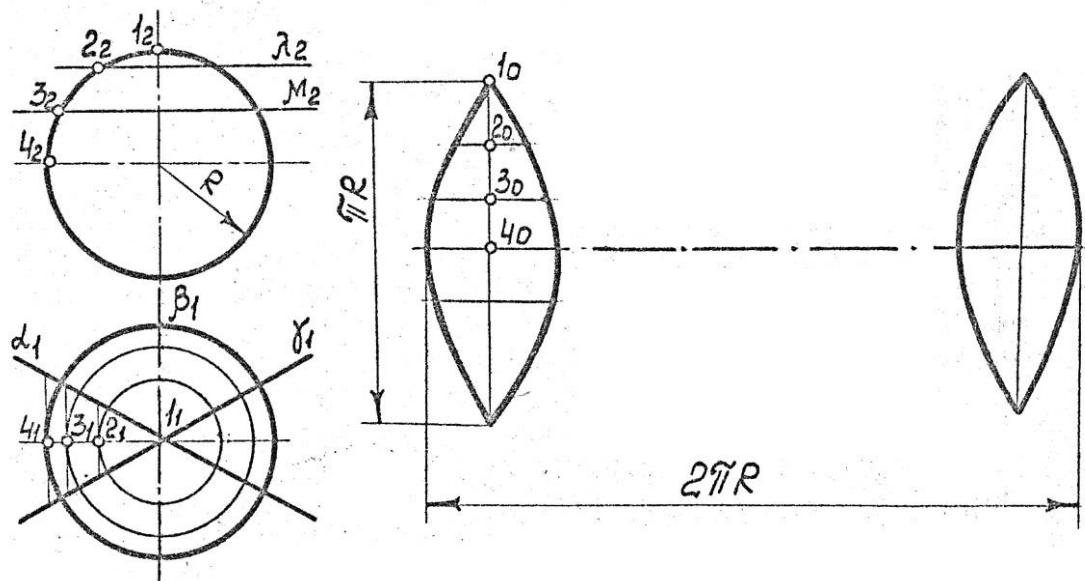


Рисунок 88

Горизонтально – проецирующими плоскостями  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и т.д. разбиваем поверхность шара на  $n$ -частей (например, на 8 частей) и заменяем каждую долю цилиндрической поверхностью. Развертку участка (доли) цилиндрической поверхности производить известным способом. Полная приближенная развертка должна содержать  $n$  - разверток таких долей.

## 12. Аксонометрические проекции

### 12.1. Образование, основные параметры и классификация аксонометрических проекций

#### Общие сведения.

Ортогональные проекции, нашедшие широкое применение в машиностроении, вполне определяют формы и размеры изображенных предметов. Однако, эти проекции обладают недостаточной наглядностью, так как изображение пространственных тел оказывается расчлененным на отдельные проекции. Поэтому наряду с ортогональными проекциями широкое распространение в технике получили аксонометрические проекции, или проекции пространственных тел вместе с осями ортогональных координат на одну плоскость проекций ( $\Pi$ ) называемую картинной плоскостью или плоскостью аксонометрических проекций (рисунок 89).

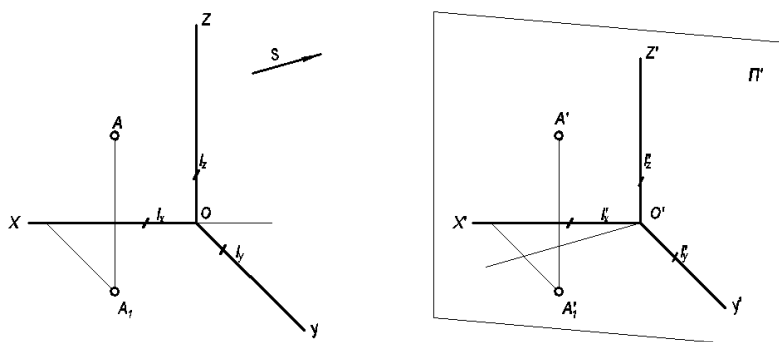


Рисунок 89

$\Pi'$  – пл. аксонометрических проекций;  
 $S$  – направление проецирования;  
 $OXYZ$ -оси ортогон. проекций;  
 $O'X'Y'Z'$ -оси аксонометрической проекций;  
 $(\cdot)A'$  – первичная проекция точки в аксонометрии;  
 $(\cdot)A'_1$  – вторичная проекция точки в аксонометрии.

$$\text{Отношения } \frac{l_{x^1}}{l_x} = k; \quad \frac{l_{y^1}}{l_y} = m; \quad \frac{l_{z^1}}{l_z} = n \quad - \quad \text{коэффициенты}$$

аксонометрического искажения, соответственно, по осям  $X$ ,  $Y$ , и  $Z$ . В зависимости от направления проецирования аксонометрические проекции делятся на:

- 1) прямоугольные, если  $S \perp \Pi'$ ;
- 2) косоугольные, если  $S \nparallel \Pi'$ ;

От положения плоскости  $\Pi'$  при неизменном направлении  $S$  аксонометрические проекции подразделяются на:

- а) триметрические когда коэффициенты искажения по всем 3-м осям различны, т.е.  $k \neq m \neq n$ ;
- б) диметрические, когда коэффициенты искажения по двум осям одинаковые, т.е.  $k=n$ ;  $k \neq m$ ;

в) изометрические, когда коэффициенты искажения по всем трем осям одинаковые, т.е.  $k=m=n$ .

Из большого количества возможных аксонометрических проекции наибольшее применение в технике получили следующие проекции (см. ГОСТ 2.317-69):

1. Прямоугольная изометрическая проекция или прямоугольная изометрия;
2. Прямоугольная диметрическая проекция или прямоугольная диметрия;
3. Косоугольная фронтальная диметрическая проекция или косоугольная диметрия.

### Прямоугольные аксонометрические проекции

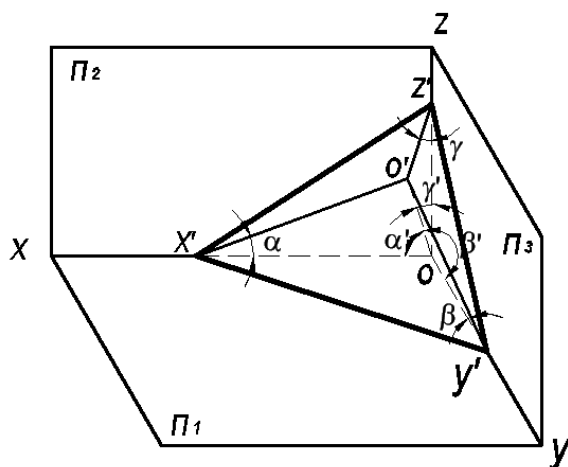


Рисунок 90

Приближим картинную плоскость  $\Pi'$  к центру ортогональных координат  $O$  и спроецируем на ее оси. Тогда

$$\frac{O'X'}{OX'} = \cos \alpha = k; \quad \frac{O'Y'}{OY'} = \cos \beta = m; \quad \frac{O'Z'}{OZ'} = \cos \gamma = n$$

$\alpha'$ ,  $\beta'$  и  $\gamma'$  – направляющие углы

Из геометрии известно, что:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1)$$

Заменяем проекции направляющих углов через дополнительные

$$\left( \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha'; \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \beta'; \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma' \right)$$

$$\text{имеем: } \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 \quad (2)$$

Так как  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$  т.д., подставляя в формулу (2), имеем

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2 \quad (3)$$

или  $k^2 + m^2 + n^2 = 2$  (4),

т.е. для прямоугольных аксонометрических проекций (рисунок 90) сумма квадратов коэффициентов искажения равная двум.

### Прямоугольная изометрия

Для прямоугольной изометрии  $k=m=n$ .

Подставляя в формулу (4) имеем  $3k^2=2$ , откуда  $k=m=n= \sqrt{2/3} = 0,82$ . При пользовании приведенными коэффициентами  $k=m=n=1$  изображение в прямоугольной изометрии увеличивается в 1,22 раза. Окружности, расположенные в пространстве в пл.  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  или им параллельных, в прямоугольной изометрии (рисунок 91) изображаются в виде эллипсов, большие оси которых  $AB=1,22d$  и располагаются перпендикулярно отсутствующей в данной плоскости оси проекций ( $Z, Y$  или  $X$ ) а малые оси  $CD=0,71d$  и располагаются перпендикулярно  $AB$ .

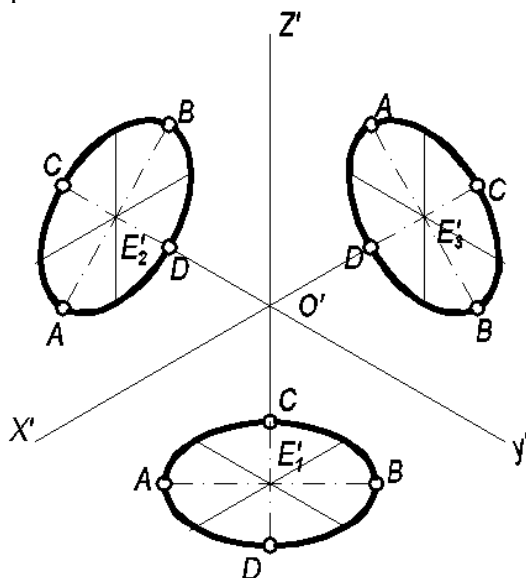


Рисунок 91

### Прямоугольная диметрия

Для прямоугольной диметрии (рисунок 92)  $k=n$ ;  $m=1/2K$

Подставляя в формулу (4), имеем:

$K=n= \sqrt{8/9} = 0,94$ ;  $m=1/2K = 0,47$ . При пользовании приведенными коэффициентами  $k=n=1$ ,  $m=0,5$  изображение увеличивается в 1,06 раза. Окружности, расположенные в пространстве в плоскостях  $\Pi_1, \Pi_3$  или им параллельных, изображаются в виде эллипсов, у которых большая ось  $AB=1,06d$  и располагается перпендикулярно отсутствующей оси  $Z'$  или  $X'$ , а малая ось  $CD=0,35d$ . Окружности, расположенные в плоскость  $\Pi_2$  или ей параллельных, изображаются в виде эллипсов,

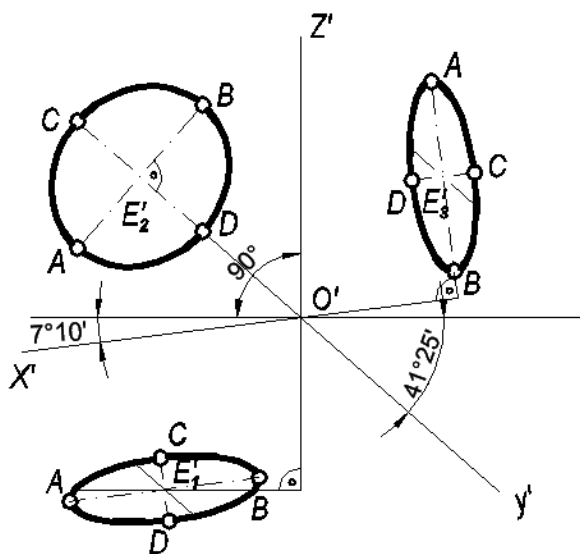


Рисунок 92

у которых большая ось  $AB=1,06 d$  и располагаются перпендикулярно от  $U'$ , а малая ось  $CD=0,95 d$  и располагается перпендикулярно  $AB$ .

### Косоугольные аксонометрические проекции

В соответствии с ГОСТ 2317-69 рекомендуются к применению следующие проекции:

- а) косоугольная фронтальная изометрическая проекция или фронтальная изометрия;
- б) косоугольная горизонтальная изометрическая проекция или горизонтальная изометрия;
- в) косоугольная фронтальная диметрическая проекция или косоугольная диметрия.

#### Косоугольная фронтальная изометрическая проекция (рисунок 93)

$\angle X'O'Z' = 90^\circ$

$\alpha = 45^\circ$  (допускает  $30^\circ$  и  $60^\circ$ )

$k=m=n=1$

Окружности, расположенные в пространстве в пл.  $\Pi_2$  или ей параллельных, изображаются без искажения, т.е. в виде окружностей диаметра  $d$ .

Окружности, расположенные в пространстве в пл.  $\Pi_1, \Pi_3$  или им параллельных, во фронтальной изометрии изображаются в виде эллипсов, большие оси которых  $AB = 1,3 d$  и располагаются под углом  $22^\circ 30'$ , соответственно, к осям  $X'$  и  $Z'$ , а малые оси этих эллипсов  $CD = 0,54 d$  и располагаются перпендикулярно  $AB$ .

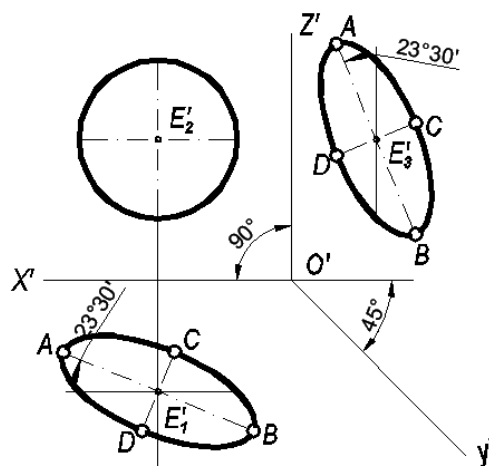


Рисунок 93

#### Косоугольная горизонтальная изометрическая проекция (Рисунок 94).

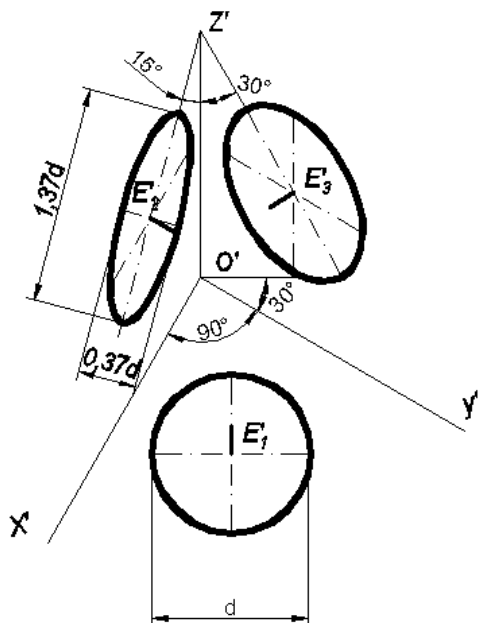


Рисунок 94

$Z$  - вертикальная,  $\angle X'O'Y' = 90^\circ$ ,  
 $\alpha = 30^\circ$  (допускается  $45^\circ$  и  $60^\circ$ ). Окружности расположенные в пространстве в пл.  $\Pi_1$  или ей параллельных, в горизонтальной изометрии изображаются без искажения, т. е. в виде окружностей того же диаметра. (d)

Окружности, расположенные в пространстве в пл.  $\Pi_2$  или ей параллельных, изображаются в виде эллипсов, у которых большая ось  $AB = 1,37d$  и наклонена к оси  $Z'$  под углом  $15^\circ$ , а малая ось эллипса  $CD = 0,37d$  и перпендикулярна  $AB$ .

Окружности, расположенные в пространстве в пл.  $\Pi_3$  или ей параллельных, изображаются в виде эллипса, у которых большая ось  $AB = 1,22d$  и наклонена к оси  $Z'$  под углом в  $30^\circ$ , а малая ось эллипса  $CD = 0,71d$  и располагается перпендикулярно  $AB$ .

### Косоугольная фронтальная диметрическая проекция (рисунок 95)

$$\angle X'O'Z' = 90^\circ.$$

$$\alpha = 45^\circ;$$

$$k = n = 1; m = 0,5;$$

Окружности, расположенные в пространстве в пл.  $\Pi_2$  или ей параллельных, изображаются без искажения, т. е. в виде окружностей того же диаметра. (d)

Окружности, расположенные в пространстве в пл.  $\Pi_1$ ,  $\Pi_3$  или им параллельных, изображаются в виде эллипсов, у которых большие оси  $AB = 1,06 d$  наклонены, соответственно, к осям  $X'$  или  $Z'$  под углом  $7^\circ 10'$ , а малые оси  $CD = 0,35d$  и располагаются перпендикулярно  $AB$ ,

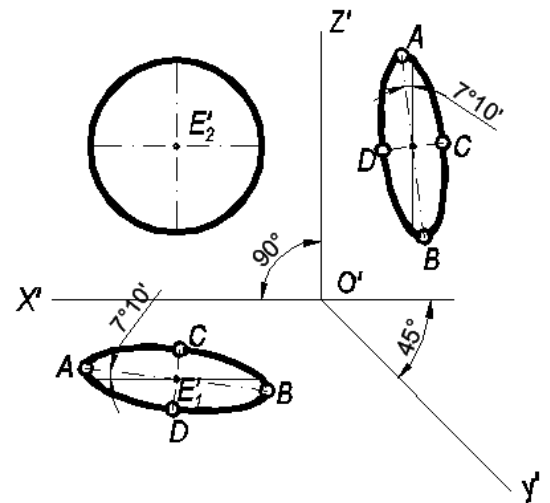


Рисунок 95

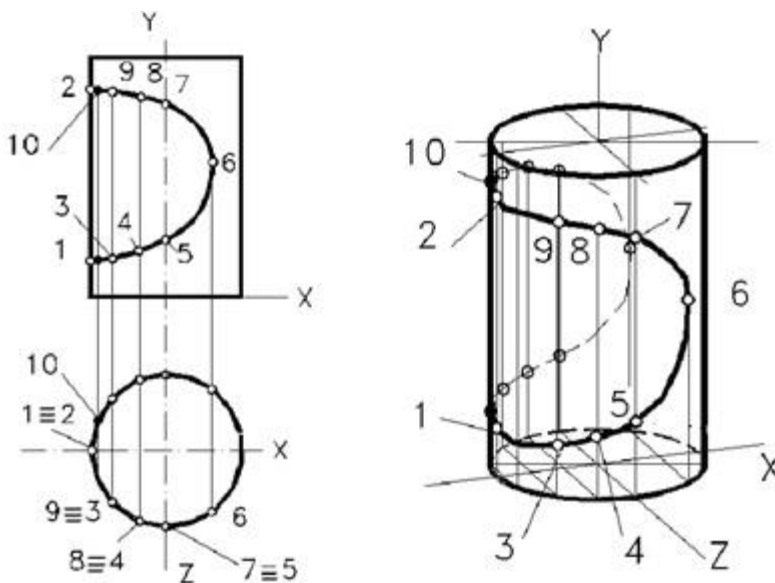


Рисунок 96

На рисунке 96 приведен пример построения цилиндра вращения с нанесенной на нем линией в прямоугольной диметрии. Аксонометрические оси привязаны к объекту таким образом, что ось  $Y$  совмещена с осью вращения цилиндра, а начало координат – в центре основания. Направления осей выбраны в соответствии с ортогональными. В целях большей наглядности изображения направление взгляда выбрано со стороны отрицательного направления оси  $X$ . Сначала выполняются построения эллипсов оснований любым из известных способов, в том числе и в форме циркульной кривой – овала. Очерковые образующие проводятся параллельно оси  $Y$  по касательным к эллипсам оснований. Если точки на поверхности цилиндра строить по их координатным ломаным, то они могут не попасть точно на поверхность. Точки на аксонометрических проекциях поверхностей должны быть расположены на аксонометрических проекциях носителей точек. Так для линейчатых поверхностей точки размещаются на аксонометрических

проекциях прямолинейных образующих. Для не линейчатых поверхностей вращения точки размещаются на параллелях, которые проецируются в эллипсы.

При построении аксонометрической проекции точки на поверхности цилиндра вращения координата  $X$  откладывается на оси  $X$ , как и обычно. Для построения отрезка координаты  $Z$  необходимо из конца отрезка  $X$  провести прямую параллельно оси  $Z$  до пересечения с эллипсом контура основания. Из полученной точки строится носитель точек на цилиндре - образующая прямая, параллельно оси  $Y$  и на ней от точки на дуге эллипса основания откладывается координата  $Y$  данной точки.

Следует иметь в виду, что на очерковой образующей аксонометрической проекции происходит смена видимости линии, но очерковая образующая на аксонометрической проекции не соответствует очерковой на ортогональном чертеже. Граничную точку необходимо определить точно. Для этого на аксонометрической проекции необходимо определить координату  $X$  основания очерковой образующей на дуге эллипса, эту координату перенести на ортогональные проекции и выяснить, какая из образующих ортогональной проекции является очерковой в аксонометрии. Если на этой образующей нет точек из числа обозначенных, то нужно выбрать, а их координаты  $Y$  перенести на очерковую образующую аксонометрической проекции. В приведенном примере одна из точек (верхняя) обозначена цифрой 10 и изображена темным пятном. Ниже без обозначения изображена другая точка на этой же образующей.

На рисунке 97 приведен пример построения конуса вращения, с нанесенной на нем линией, в прямоугольной изометрии. Строится эллипс основания конуса любым из известных способов. Определяется аксонометрическая проекция вершины конуса, и из вершины проводятся касательные (очерковые образующие) к эллипсу основания конуса.

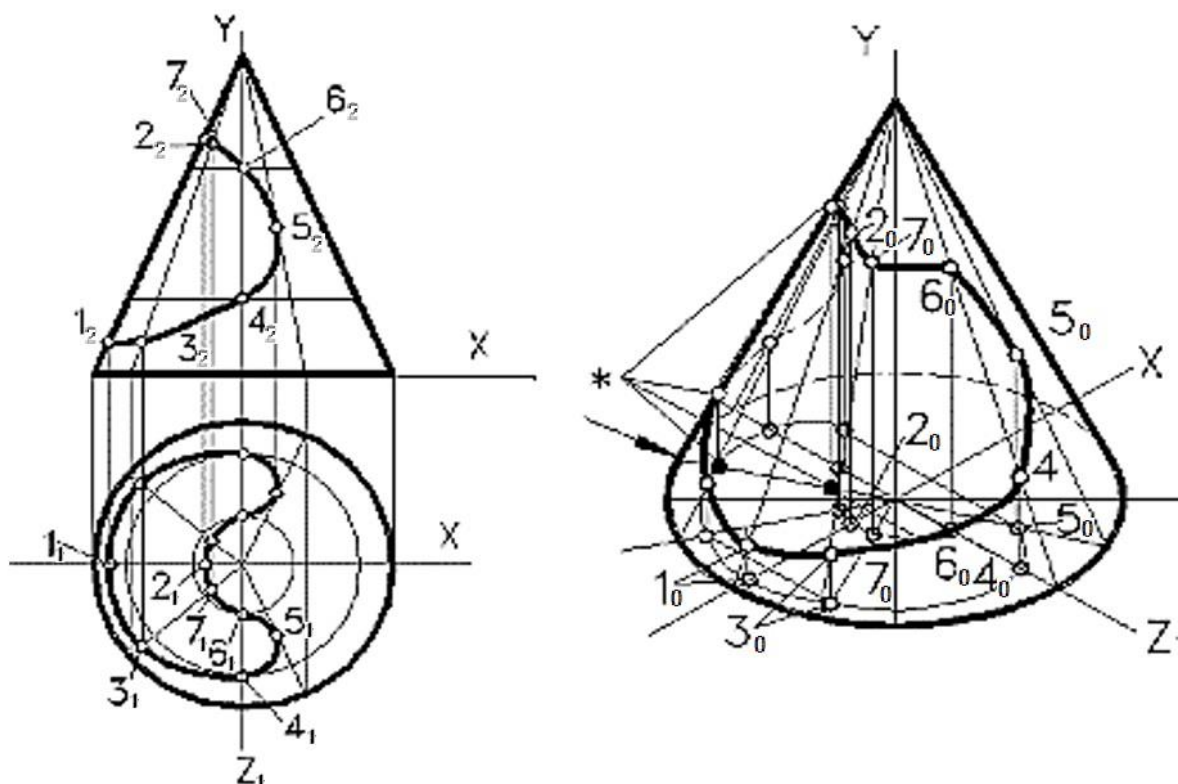


Рисунок 97

Каждую выбранную точку линии на поверхности конуса можно построить по ее координатной ломаной. При этом не все точки попадут точно на поверхность конуса, особенно, если эллипс основания построен приближенно. Для обеспечения точного попадания точек на поверхность конуса их необходимо разместить на аксонометрических проекциях носителей – прямолинейных образующих. Для этого необходимо построить вторичную проекцию линии по координатам  $X$  и  $Z$ , как показано тонкой линией на рисунке 97. Для построения аксонометрической проекции точки необходимо построить вторичную проекцию образующей, проходящую через вторичную проекцию точки. Затем построить аксонометрическую проекцию этой образующей и параллельно оси  $Y$  подняться из вторичной проекции точки до встречи с аксонометрической проекцией образующей, где и будет аксонометрическая проекция точки. Этот прием может привести к погрешностям для тех образующих, которые на аксонометрической проекции располагаются параллельно оси  $Y$  или под небольшим углом к ней. В этих случаях необходимо контролировать положение точки по величине координаты  $Y$ , откладываемой от вторичной проекции точки параллельно оси  $Y$ , или на аксонометрической проекции образующей.

Для определения границы видимости нет необходимости обращаться к ортогональным проекциям. Необходимо из основания очерковой образующей (на рисунке 97 указано стрелкой) построить ее вторичную проекцию и из точек пересечения ее со вторичной проекцией линии подняться параллельно  $Y$  до аксонометрической проекции очерковой образующей. На рисунке 97 указанные точки обозначены звездочкой.

На рисунке 98 приведен пример построения в прямоугольной изометрии линии пересечения треугольников  $ABC$  и  $DEK$ . Для решения позиционных задач в аксонометрии необходимо иметь две полные проекции объектов, одна из которых – аксонометрическая, другая – вторичная. При этом вторичная проекция может быть горизонтальной, фронтальной или профильной. В приведенном примере используется горизонтальная вторичная проекция треугольников. Алгоритм решения известен. Через сторону  $DE$  проводим горизонтально-проецирующую плоскость  $\alpha$  и линию 1-2 пересечения ее с плоскостью  $ABC$ . На пересечении линии 1-2 со стороной  $DE$  находится точка  $M$ , общая

для пересекающихся плоскостей, одна из точек линии пересечения. Для построения точки  $N$  использована горизонтально-проецирующая плоскость  $\beta$ , проведенная через сторону  $EK$ . Плоскость  $\beta$  пересекает треугольник  $ABC$  по прямой 3-4, а пересечение этой прямой с  $EK$  дает точку  $N$ , общую для двух плоскостей, вторую точку линии пересечения.

На рисунке 99 показано решение задачи на построение линии пересечения двух цилиндров вращения в прямоугольной изометрии. Начало осей пространственных координат размещено в центре основания вертикального цилиндра, ось  $Y$  совмещена с осью вращения вертикального цилиндра, а ось  $X$  параллельна оси вращения горизонтального цилиндра. Когда аксонометрические проекции обоих цилиндров построены, можно начинать построение точек линии их пересечения.

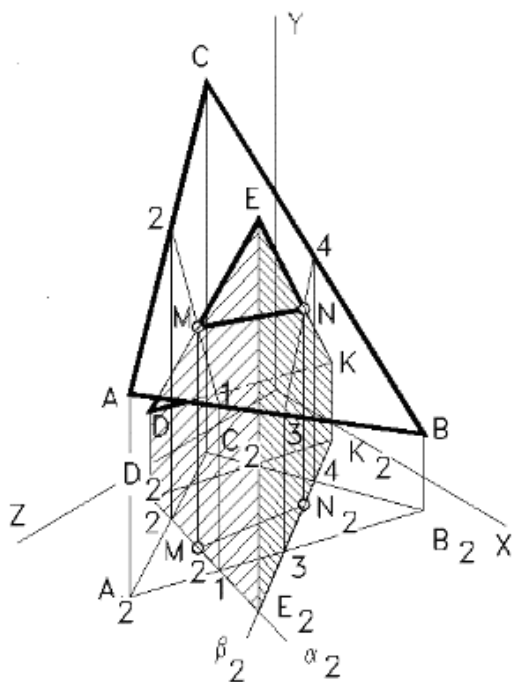


Рисунок 98

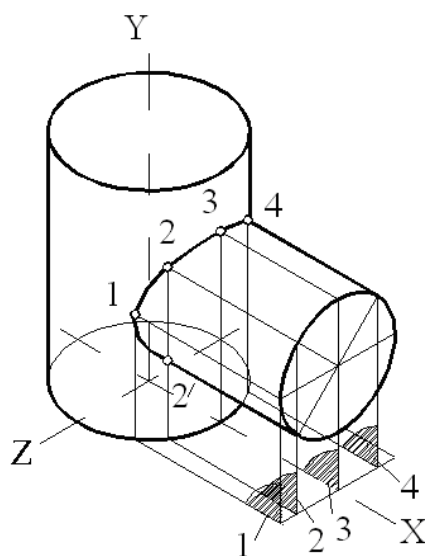
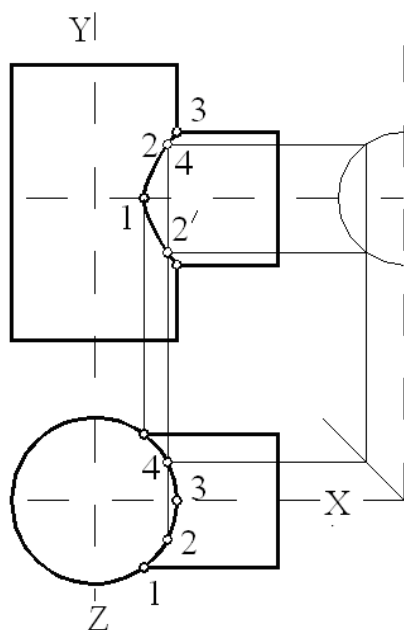


Рисунок 99

Для определения точки 1 используется секущая плоскость 1, параллельная осям вращения цилиндров. Эта плоскость, соприкасаясь с горизонтальным цилиндром, пересекает по образующей вертикальный цилиндр. На пересечении образующих, лежащих в плоскости 1 и определяется точка 1. Плоскость 2 проведена через

аксонометрическую очерковую образующую горизонтального цилиндра. Эта плоскость пересекает горизонтальный цилиндр по очерку (внизу) и по сопутствующей образующей (вверху). На пересечении этих образующих с образующей вертикального цилиндра, расположенных в секущей плоскости 2, получим точку 2 на очерке и точку 2 на сопутствующей образующей. Плоскость 3 совпадает с осями вращения обоих цилиндров и дает видимую точку линии пересечения 3. Эта же плоскость дает и невидимую точку, которая на рисунке 94 не показана, но ее можно построить.



## Содержание

1.	Введение	
2.	Понятие о проецировании	
3.	Проекции точки	
4.	Проекции прямой линии	
5.	Следы прямой линии	
	5.1 Взаимное положение двух прямых	
	5.2 Теорема о проекции плоского прямого угла	
6.	Плоскость	
	6.1 Задание плоскости	
	6.2 Прямая и точка в плоскости	
	6.3 Прямые особого положения плоскости	
	6.4 Плоскости частного положения	
7.	Относительное положение двух плоскостей	
	7.1 Определение видимости геометрических элементов на чертеже	
	7.2 Относительное положение прямой и плоскости	
8.	Перпендикулярность прямой и плоскости, двух прямых, двух плоскостей	
9.	Способы преобразования комплексного чертежа	
	9.1 Способ замены плоскостей проекций	
	9.2 Способ плоско - параллельного перемещения	
	9.3 Способ вращения вокруг проецирующей прямой	
	9.4 Способ вращения вокруг линии уровня	
10.	Многогранники и кривые поверхности	
11.	Пересечение пространственных тел плоскостью	
12.	Взаимное пересечение пространственных тел	
13.	Развертывание поверхностей пространственных тел	
	13.1 Построение разверток пирамид и конусов	
	13.2 Построение разверток призм и цилиндров	
	13.3 Построение приближенных разверток	
14.	Аксонметрические проекции	
	14.1 Образование, основные параметры и классификация аксонометрических проекций	
15.	Содержание	

### Литература.

1. Н.Ф.Четверухин, В.С.Левицкий и др. Начертательная геометрия М.: Высшая школа. 1963.
2. В.О.Гордон, М.А.Семенцов-Огиевский. Курс начертательной геометрии. М.: Высшая школа. 1998.
3. В.И.Зубков. Начертательная геометрия. Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ. 2000.